

# Matematikari Euskaldunen II. Topaketak

UEU, Markeskoa jauregia, Eibar, 2016-07-01

*Stern-en segidan* oinarritutako  
 $\mathbb{Q}^+$ -ren zenbait zenbakitze sistema

Yosu Yurramendi Mendizabal

UEUKidea

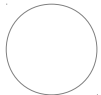
EHUko Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala sailekoa

yosu.yurramendi@ehu.eus

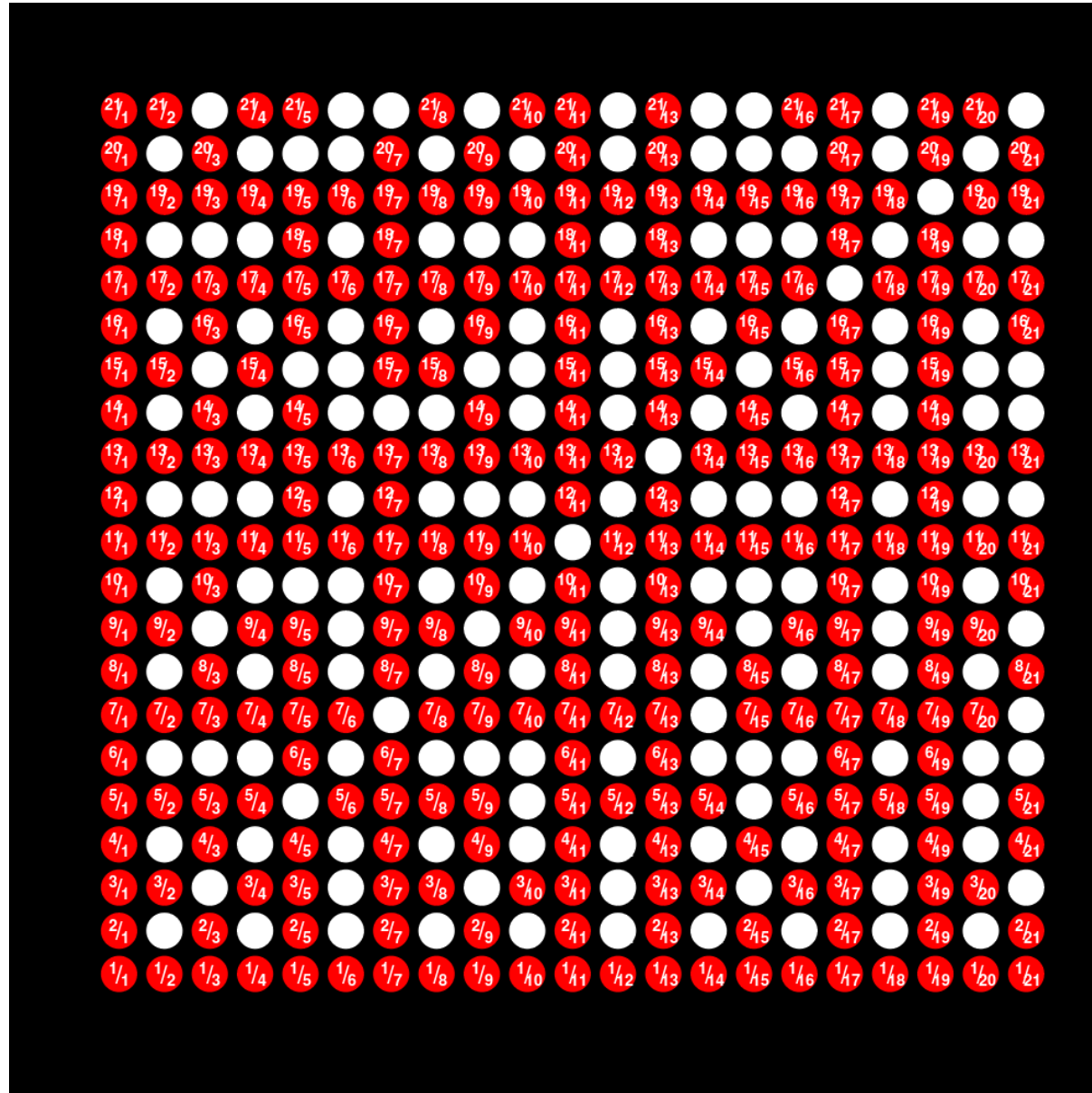
$\mathbb{Q}^+$



$\mathbb{Q}^+$ koa,  
*Elkar lehenak*



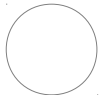
Ez  $\mathbb{Q}^+$ koa,  
faktore  
komunen bat  
>1



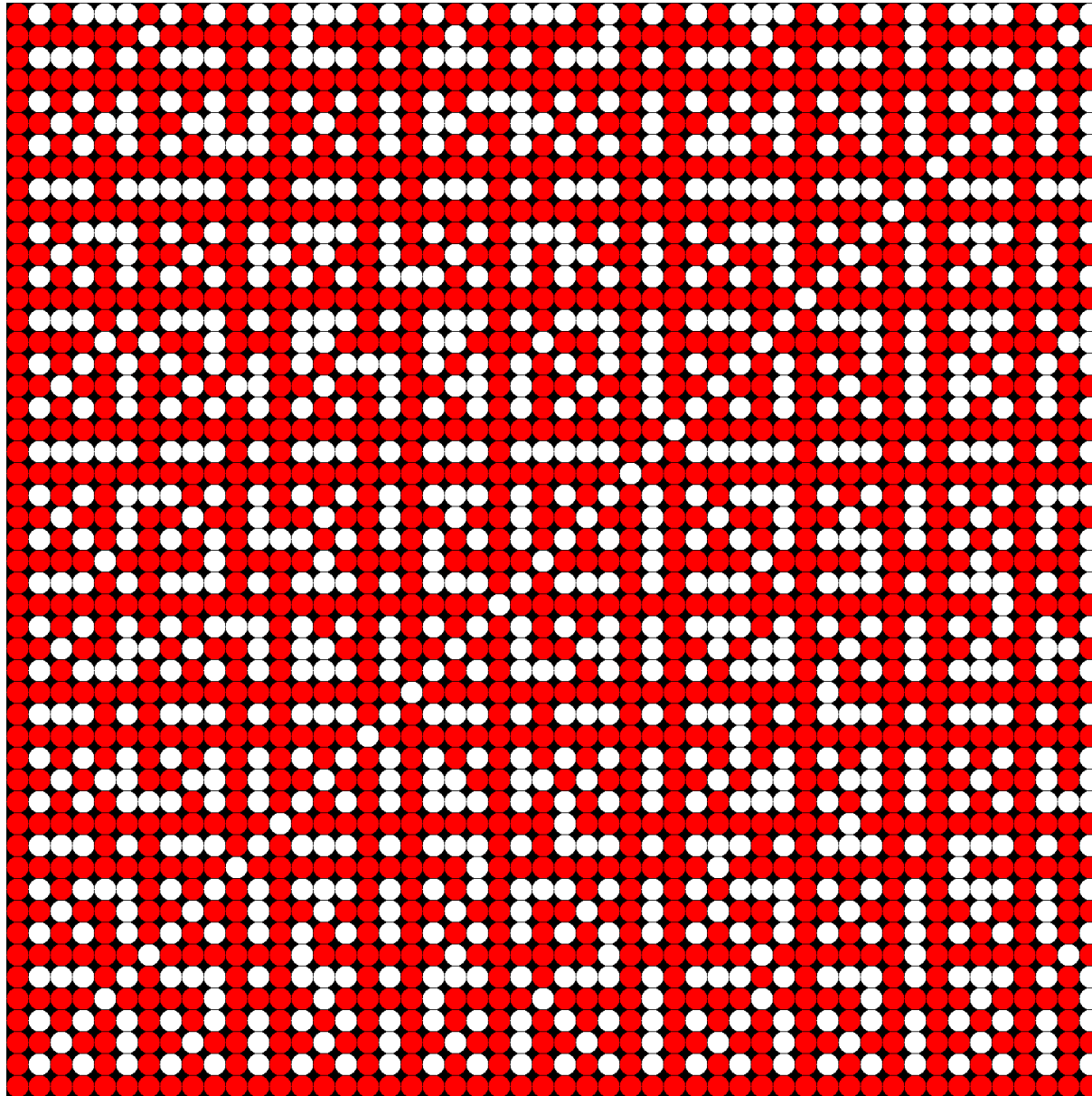
$\mathbb{Q}^+$



$\mathbb{Q}^+$ koa,  
*Elkar lehenak*



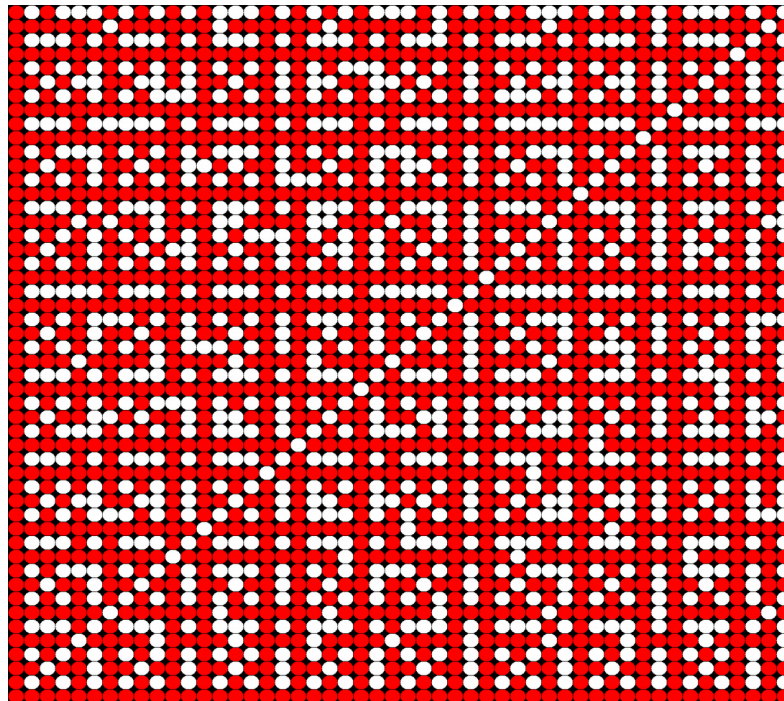
Ez  $\mathbb{Q}^+$ koa,  
faktore  
komunen bat  
>1



Helburua: Definitu  $\mathbb{Q}^+$ -ren zenbait zenbakitze sistema

Helburua: Definitu  $\mathbb{Q}^+$ -ren zenbait zenbakitze sistema

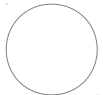
Helburua, grafikoki:  $\mathbb{Q}^+$ -ren errepresentazioa grafikoan,  
definitu ibilbide bat, puntu **gorri** guztietatik  
*behin bakarrik* pasatzen dena



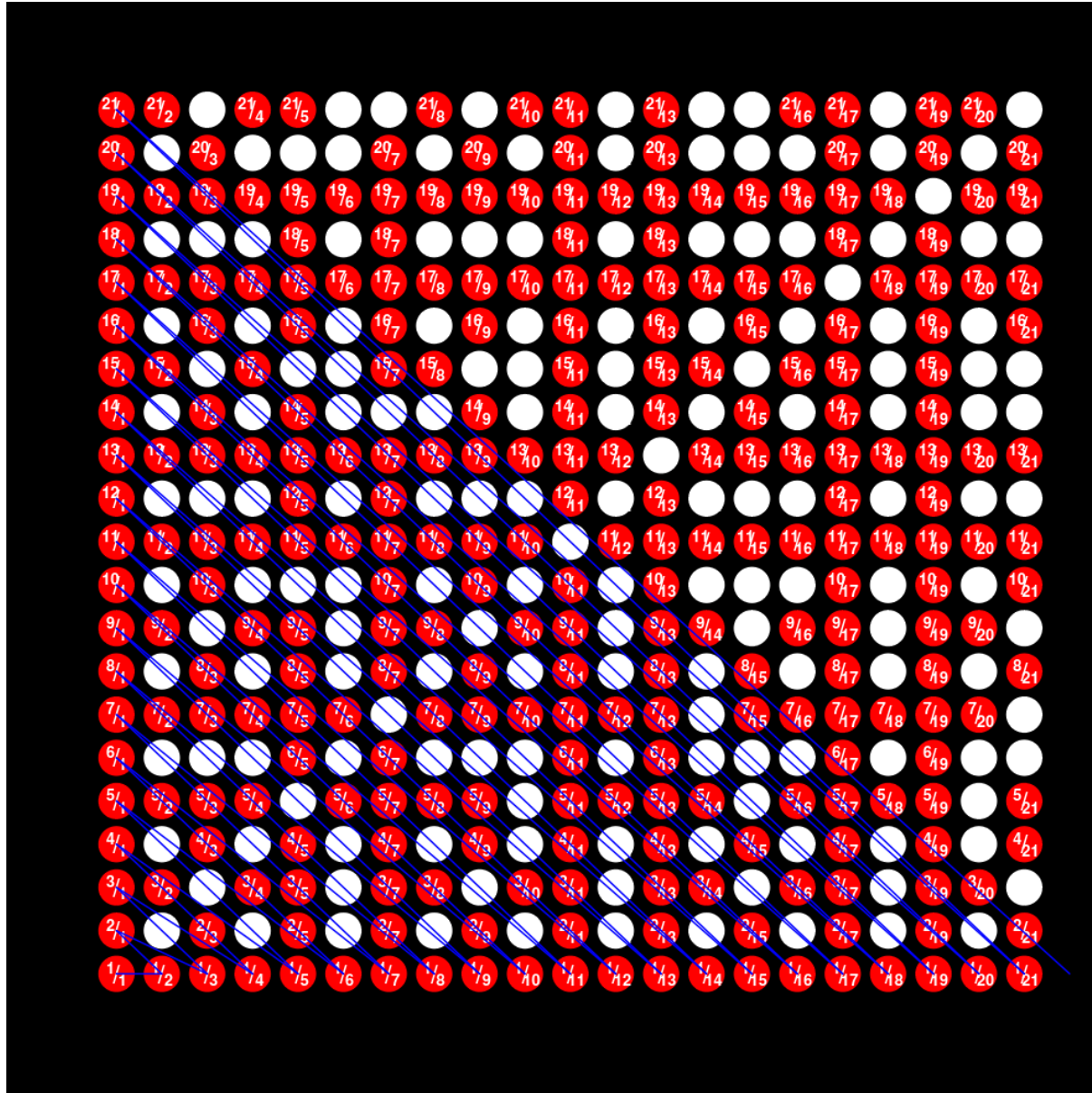
$\mathbb{Q}^+$



$\mathbb{Q}^+$ koa,  
*Elkar lehenak*



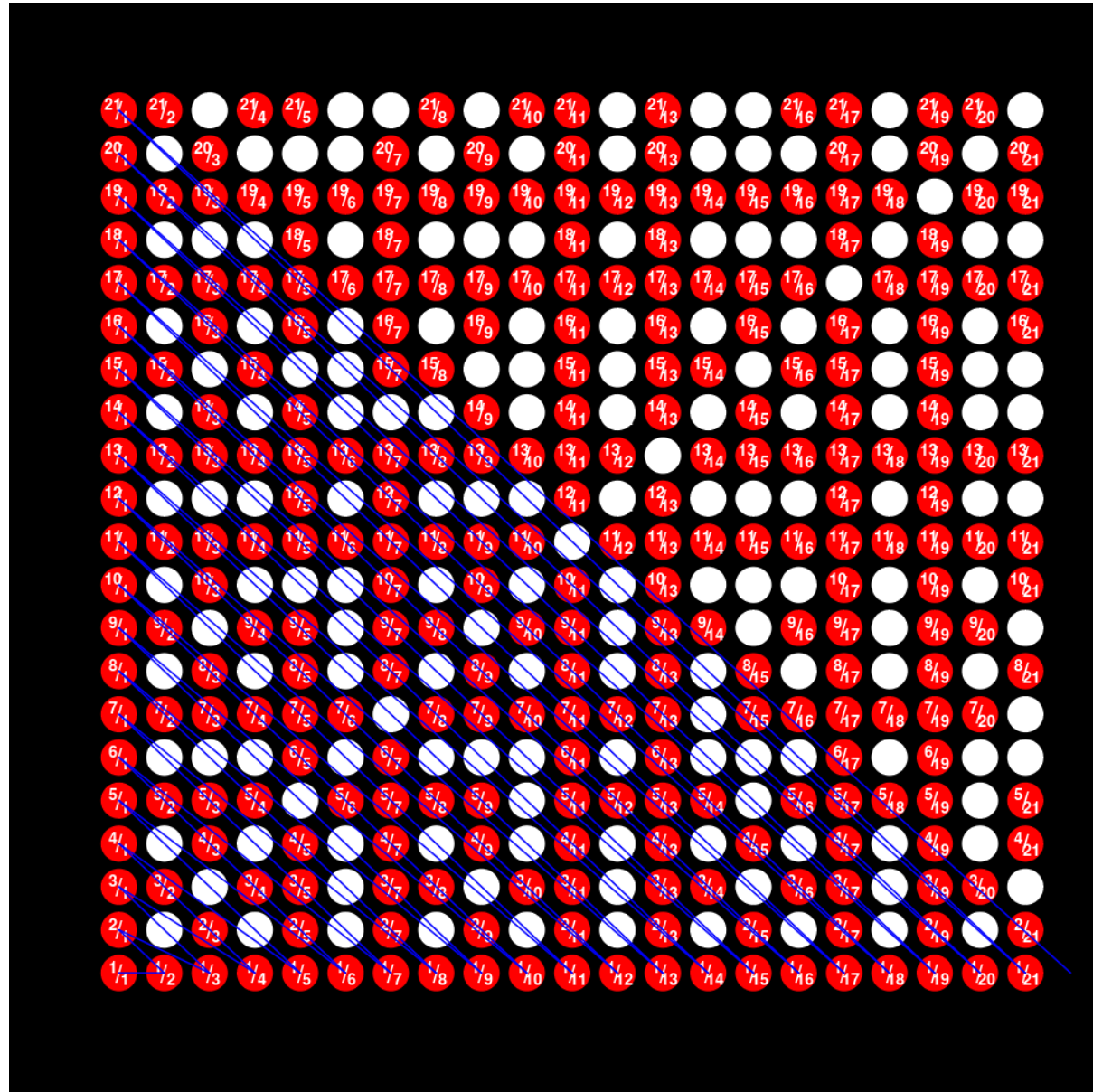
Ez  $\mathbb{Q}^+$ koa,  
faktore  
komunen bat  
>1



$\mathbb{Q}^+$



Georg Cantor  
(1845 – 1918)



Helburua: Definitu  $\mathbb{Q}^+$ -ren zenbait zenbakitze sistema



Helburua: Definitu  $\mathbb{Q}^+$ -ren zenbait zenbakitze sistema

***Stern-en segida*** oinarritzat hartuta

*Stern-en segidaren eraiketa*

# *Stern-en segidaren eraiketa*

1

1

# *Stern-en segidaren eraiketa*

1

1

2

1

1

# *Stern-en segidaren eraiketa*

<b>1</b>						<b>1</b>
<b>1</b>				<b>2</b>		<b>1</b>
<b>1</b>	<b>3</b>		<b>2</b>		<b>3</b>	<b>1</b>

# *Stern-en segidaren eraiketa*

1									1
1				2					1
1		3		2		3			1
1	4	3	5	2	5	3	4		1

# *Stern-en segidaren eraiketa*

1																	1
1								2									1
1				3				2				3					1
1		4		3		5		2		5		3		4			1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5		1

# *Stern-en segidaren eraiketa*

1																					1											
1								2														1										
1						3		2					3									1										
1			4			3		5				2		5			3				4	1										
1		5	4		7	3		8		5		7		2		7		5		8	3		7	4		5		1				
1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9	7	12	5	13	8	11	3	10	7	11	4	9	5	6	1



# Stern-en segidaren eraiketa

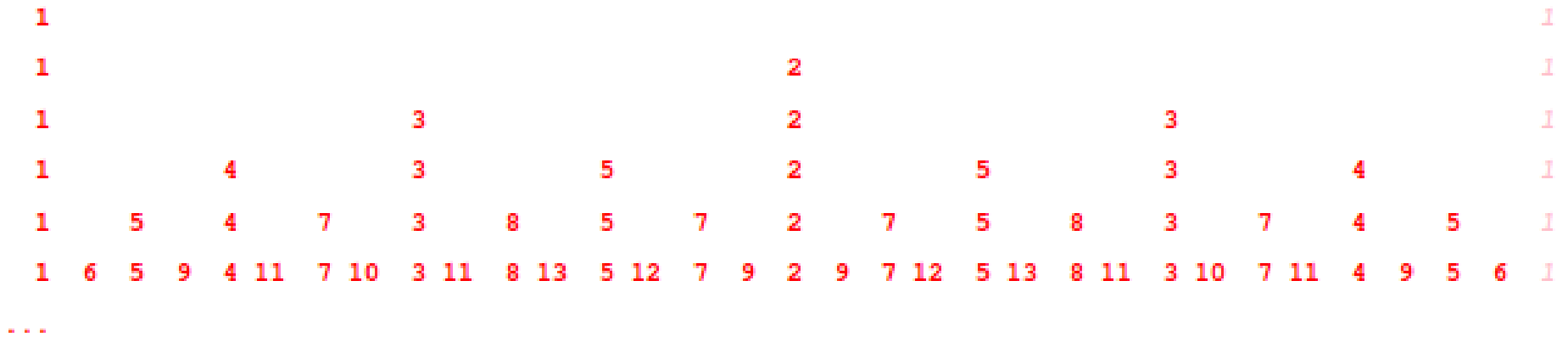
1																						1										
1								2														1										
1							3			2				3								1										
1		4					3		5		2		5		3			4				1										
1	5	4	7				3	8	5	7	2	7	5	8	3	7		4	5			1										
1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9	7	12	5	13	8	11	3	10	7	11	4	9	5	6	1

...

$$a(2n) = a(n)$$

$$a(2n+1) = a(2n) + a(2n+2)$$

# *Stern-en segidaren eraiketa*



$$a(2n) = a(n)$$

$$a(2n+1) = a(2n) + a(2n+2)$$

## Definizioa



Moritz Abraham Stern  
(1807 – 1894)

$$a(0) = 0$$

$$a(1) = 1$$

$$a(2n) = a(n)$$

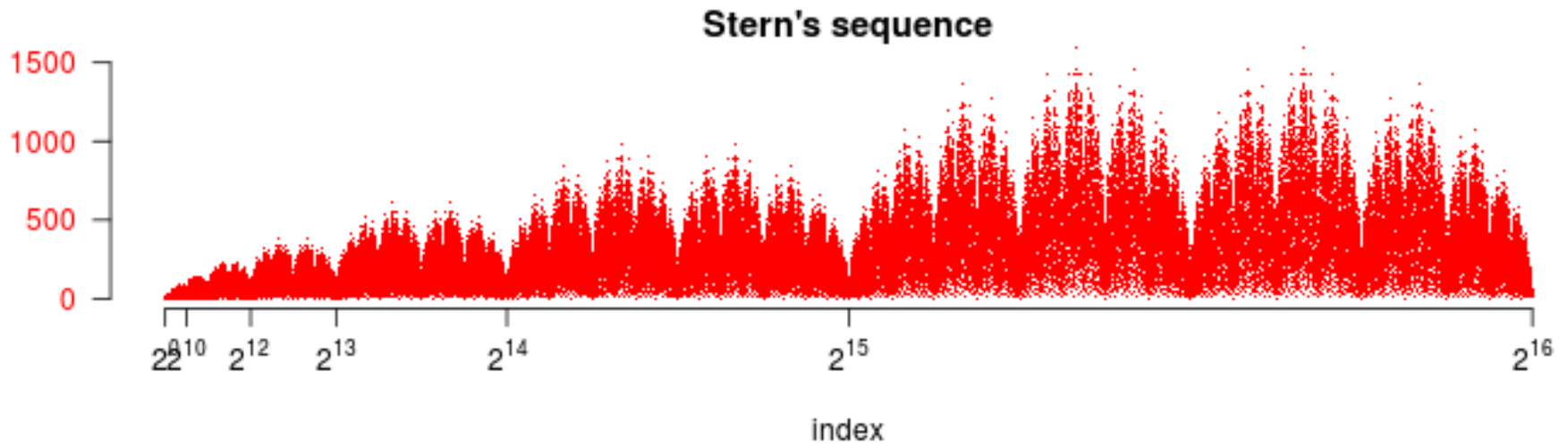
$$a(2n+1) = a(n) + a(n+1)$$

# *Stern-en segida*

1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4  
5 1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 7 11 4  
9 5 6 1 7 6 11 5 14 9 13 4 15 11 18 7 17 10 13 3 14 11 19 8 21 13 18 5 17 12  
...

# *Stern-en seguida*

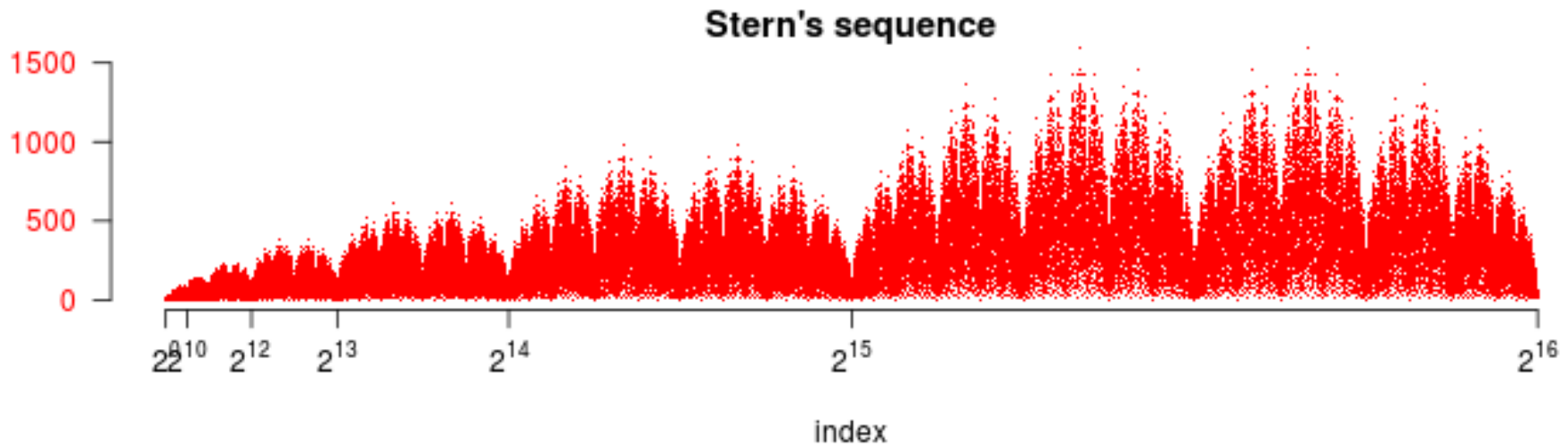
1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4  
5 1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 7 11 4  
9 5 6 1 7 6 11 5 14 9 13 4 15 11 18 7 17 10 13 3 14 11 19 8 21 13 18 5 17 12  
...





# Stern-en segida

1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4  
 5 1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 7 11 4  
 9 5 6 1 7 6 11 5 14 9 13 4 15 11 18 7 17 10 13 3 14 11 19 8 21 13 18 5 17 12  
 ...



$a(2^m+k)$	k																																
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
0	1																																
1	1	2																															
2	1	3	2	3																													
3	1	4	3	5	2	5	3	4																									
4	1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5																	
5	1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9	7	12	5	13	8	11	3	10	7	11	4	9	5	6	
...																																	
$\delta$	0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	...

		k																																	
$a(2^m+k)$	m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
	0	1																																	
	1	1	2																																
	2	1	3	2	3																														
	3	1	4	3	5	2	5	3	4																										
	4	1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5																		
	5	1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9	7	12	5	13	8	11	3	10	7	11	4	9	5	6		
	...																																		

*Stern-en segida mailaka: **zenbakitzailea izendatzailea***

	k																															
$a(2^m+k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
m=0	1																															
m=1	1	2																														
m=2	1	3	2	3																												
m=3	1	4	3	5	2	5	3	4																								
m=4	1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5																
m=5	1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9	7	12	5	13	8	11	3	10	7	11	4	9	5	6
...																																

Stern-en segida mailaka: **zenbakitzailea izendatzailea**

$m=0: \{1/1\}.$

$m=1: \{1/2, 2/1\}.$

$m=2: \{1/3, 2/3, 3/2, 3/1\}.$

$m=3: \{1/4, 2/5, 3/5, 3/4, 4/3, 5/3, 5/2, 4/1\}.$

$m=4: \{1/5, 2/7, 3/8, 3/7, 4/7, 5/8, 5/7, 4/5, 5/4, 7/5, 8/5, 7/4, 7/3, 8/3, 7/2, 5/1\}.$

...



$m=0$ : {1/1}. Stern-en segida: **zenbakitzailea izendatzailea**

$m=1$ : {1/2, 2/1}.

$m=2$ : {1/3, 2/3, 3/2, 3/1}.

$m=3$ : {1/4, 2/5, 3/5, 3/4, 4/3, 5/3, 5/2, 4/1}.

$m=4$ : {1/5, 2/7, 3/8, 3/7, 4/7, 5/8, 5/7, 4/5, 5/4, 7/5, 8/5, 7/4, 7/3, 8/3, 7/2, 5/1}.

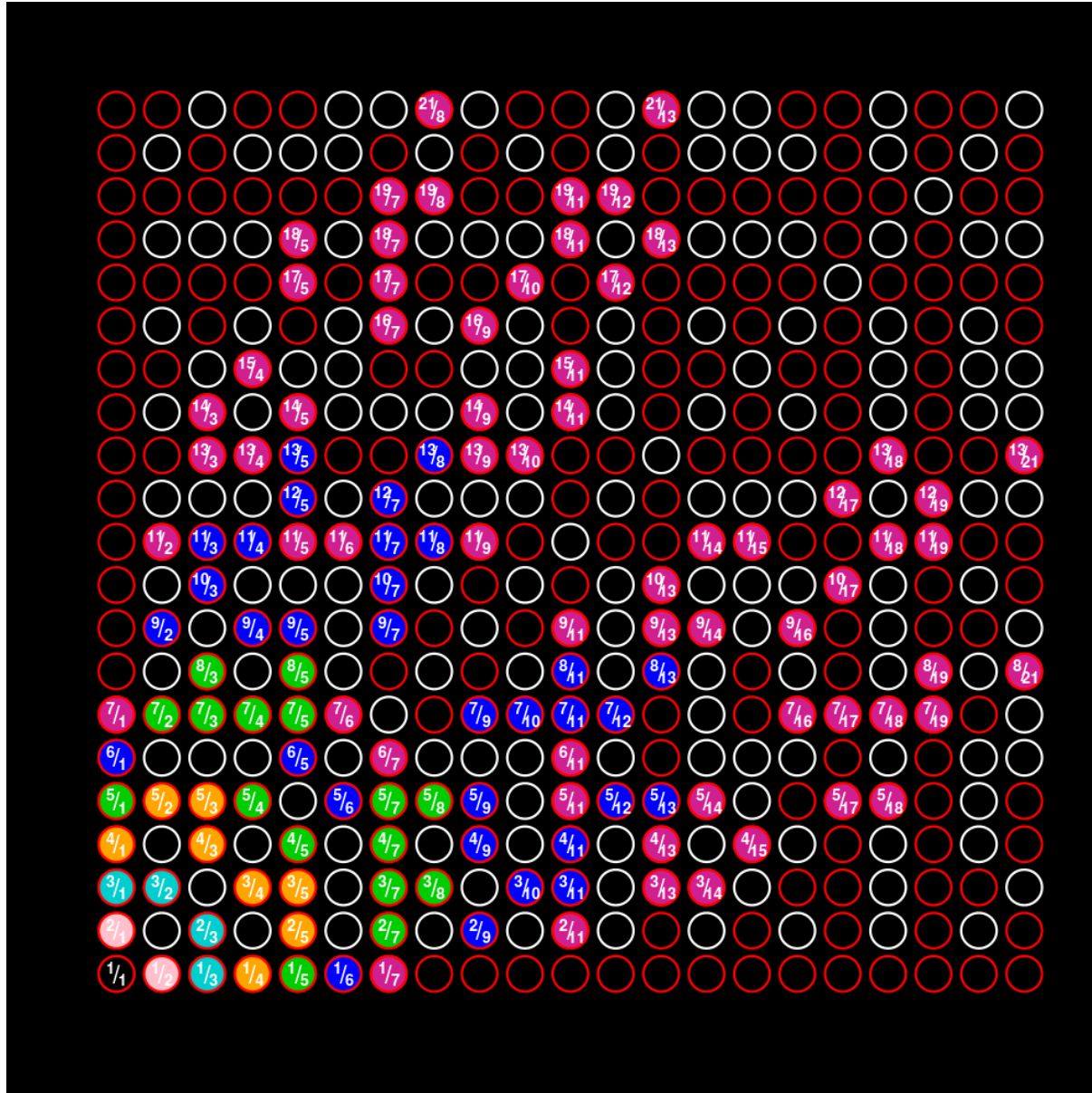
...



$\mathbb{Q}^+$ koa,  
Elkar lehenak



Ez  $\mathbb{Q}^+$ koa,  
faktore  
komunen bat  
> 1

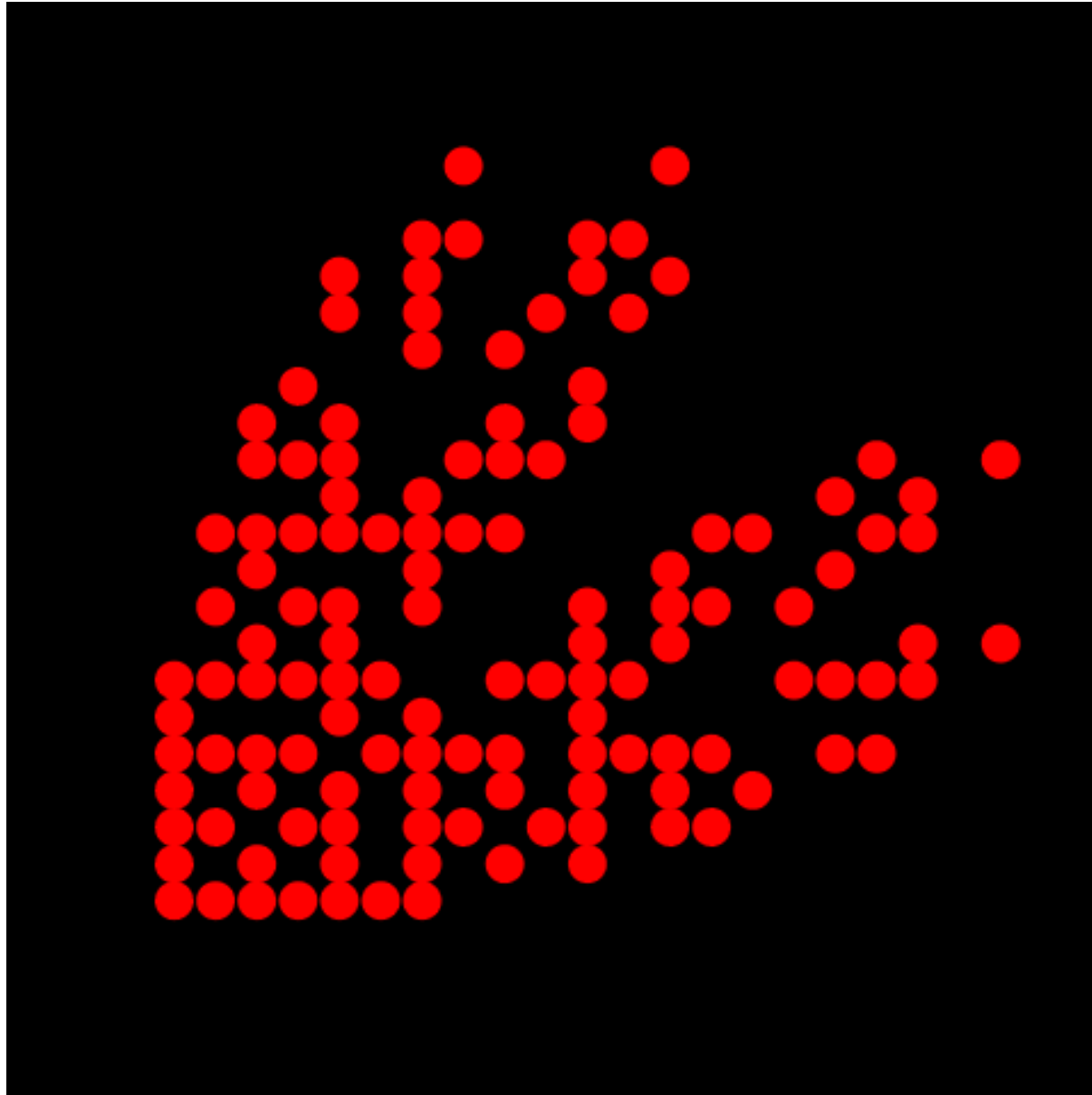


Maila jakin bateraino ( $m=6$ ) aipatzen diren zatikiak

$\mathbb{Q}^+$



$\mathbb{Q}^+$ koa,  
*Elkar lehenak*

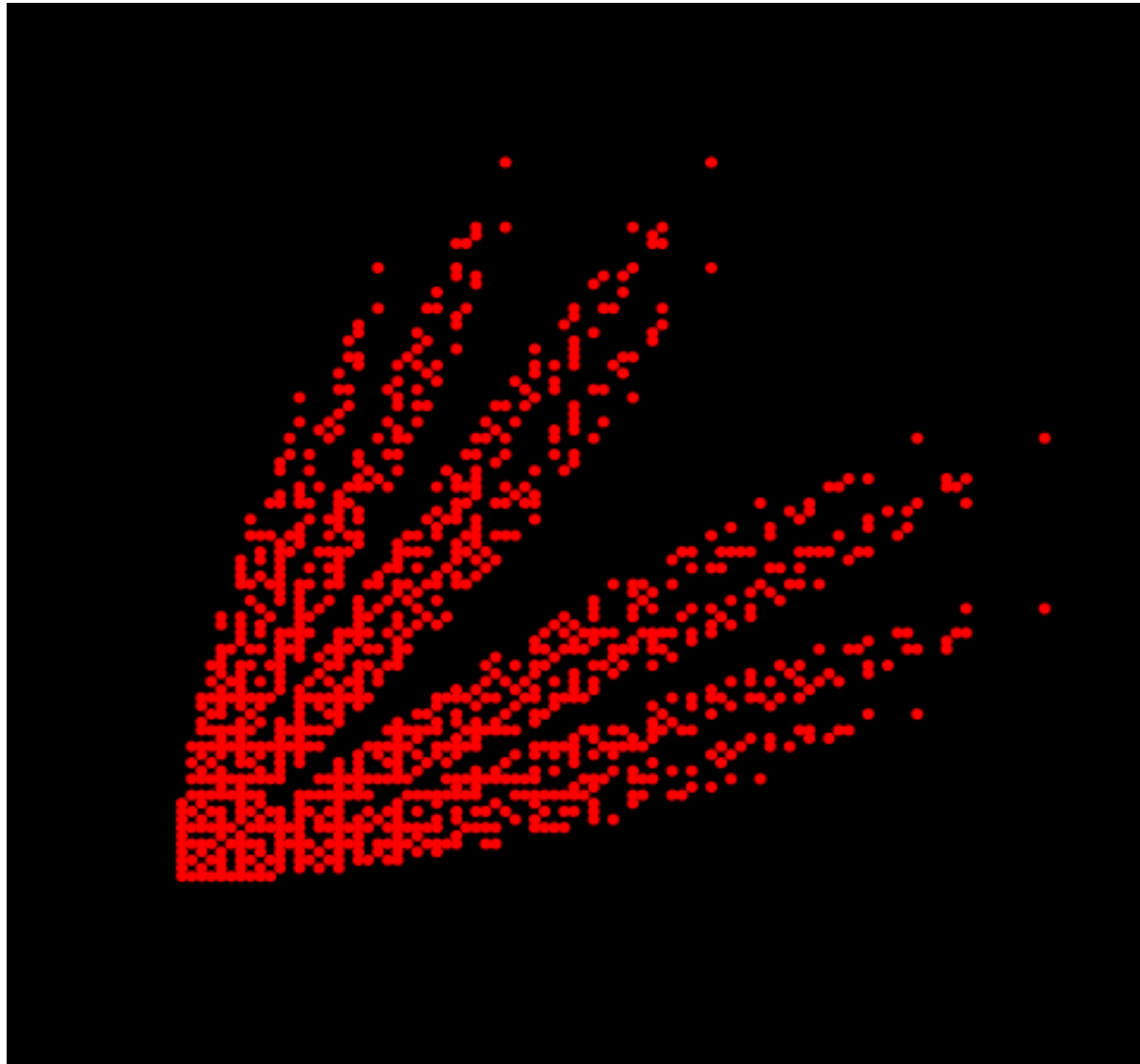


Maila jakin bateraino ( $m=13$ ) aipatzen diren zatikiak

$\mathbb{Q}^+$



$\mathbb{Q}^+$ koa,  
*Elkar lehenak*

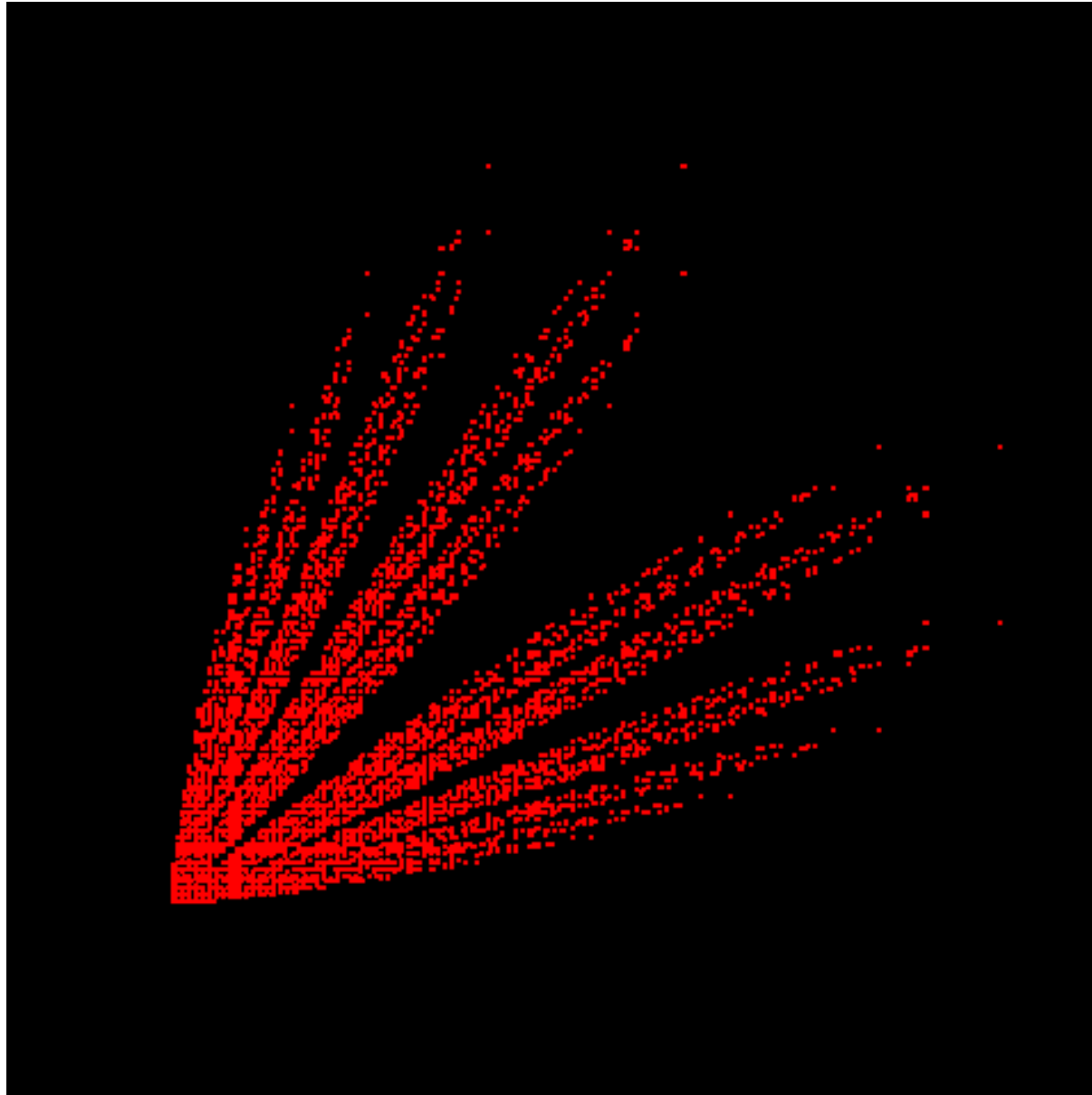


Maila jakin bateraino aipatzen diren zatikiak

$\mathbb{Q}^+$



$\mathbb{Q}^+$ koa,  
*Elkar lehenak*

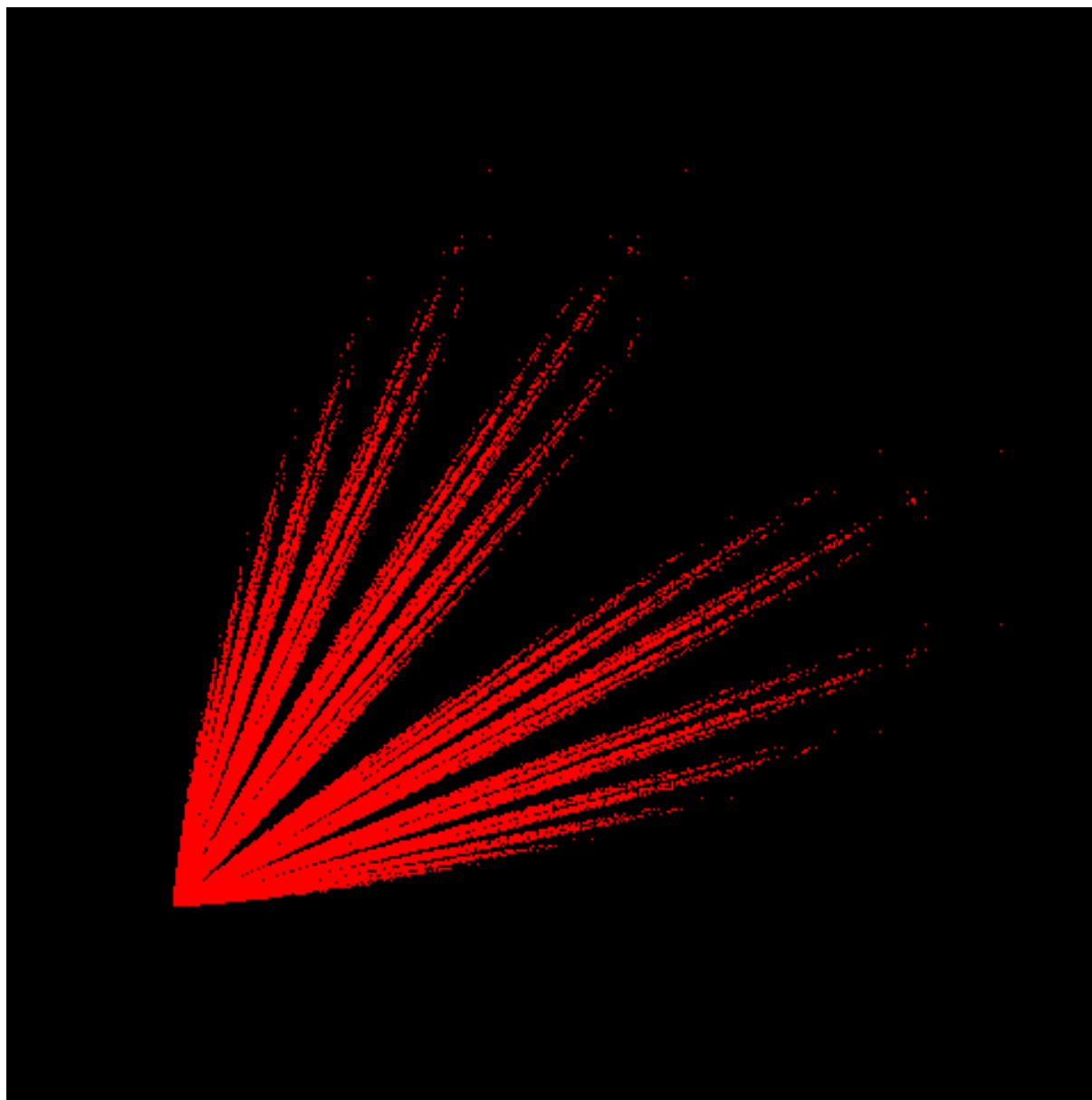


Maila jakin bateraino aipatzen diren zatikiak

$\mathbb{Q}^+$



$\mathbb{Q}^+$ koa,  
*Elkar lehenak*



*Stern-Brocot-en kometa*

*Stern-en segidan* oinarritzen diren  $\mathbb{Q}^+$ -ren zenbakitze sistema guztiek dituzte zatiki berberak maila guztietan. Zatiki horien **ordena** da sistema bakoitzaren bereizgarria.

*Stern-en segidan* oinarritzen diren  $\mathbb{Q}^+$ -ren zenbakitze sistema guztiek dituzte zatiki berberak maila guztietan.

Zatiki horien **ordena** da sistema bakoitzaren bereizgarria. Adibidez:

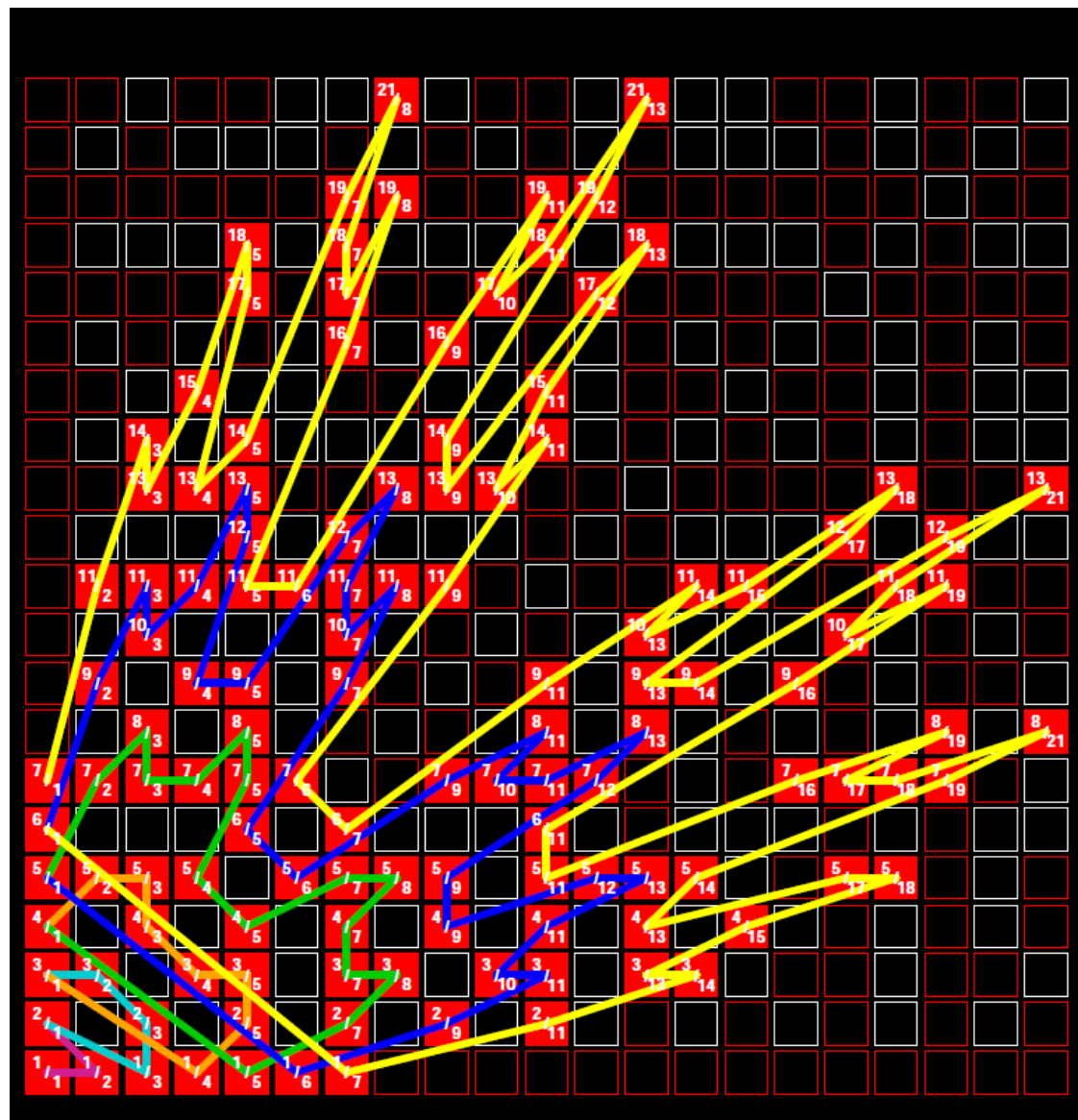


$\mathbb{Q}^+$ koa,  
*Elkar lehenak*



Ez  $\mathbb{Q}^+$ koa,  
faktore  
komunen bat  
>1

*Stern-Brocot-en*  
sistema



*Stern-en segidan* oinarritzen diren  $\mathbb{Q}^+$ -ren zenbakitze sistema guztiek dituzte zatiki berberak maila guztietan. Zatiki horien **ordena** da sistema bakoitzaren bereizgarria.

$m=0$ : {1/1}.

$m=1$ : {1/2, 2/1}.

$m=2$ : {1/3, 2/3, 3/2, 3/1}.

$m=3$ : {1/4, 2/5, 3/5, 3/4, 4/3, 5/3, 5/2, 4/1}.

$m=4$ : {1/5, 2/7, 3/8, 3/7, 4/7, 5/8, 5/7, 4/5, 5/4, 7/5, 8/5, 7/4, 7/3, 8/3, 7/2, 5/1}.

...

Maila bateko zatikien ordenak aztertzeko

$m = 0$ . Zatiki bakarra: **1/1**

$m = 1$ . 2 zatiki, 2 ordena desberdin: **1/2**, **2/1** ala **2/1**, **1/2**.

Beraz, zenbakitze sistemen hasiera: **1/1**, **1/2**, **2/1**, ... ala **1/1**, **2/1**, **1/2**, ...

Bi sistema baliokidetzat har ditzakegu baten **zenbakitzaileak** eta **izendatzaileak** trukatzuz bestea lortzen bada. Hautatua: **1/1**, **1/2**, **2/1**, ...

$m = 2$ . 4 zatiki, 24 ordena desberdin. *Stern-en segidan* 12 ordena desberdin.

12 hauen arteko **zenbakitzaile** - **izendatzaile** konposaketaren azterketa.



$m = 2$ . 4 zatiki, 24 ordena desberdin.

*Stern-en segidan* 12 ordena desberdin.

{1 2 3 3, 2 1 3 3, 1 3 2 3, 2 3 1 3, 1 3 3 2, 2 3 3 1,  
3 3 2 1, 3 3 1 2, 3 2 3 1, 3 1 3 2, 3 2 1 3, 3 1 2 3}

12 hauen arteko **zenbakitzaile** - **izendatzaile** konposaketaren azterketa.

Permutazioak bitan sailkatu daitezke, {**1/3**, **2/3**, **3/2**, **3/1**} lau zatikiak osatzearren, elkarren artean duten bateragarritasuna gogoan hartuta.

{**1 2 3 3**, **2 1 3 3**, **1 3 2 3**, **2 3 1 3**, **1 3 3 2**, **2 3 3 1**},  
{**3 3 2 1**, **3 3 1 2**, **3 2 3 1**, **3 1 3 2**, **3 2 1 3**, **3 1 2 3**}

Guztira 12 zatiki-ordena lortzen da (hurrengo gardenkian).

Beste 12ak (24 dira-eta):

{**1 2 3 3**, **2 1 3 3**, **1 3 2 3**, **2 3 1 3**, **1 3 3 2**, **2 3 3 1**},  
{**3 3 2 1**, **3 3 1 2**, **3 2 3 1**, **3 1 3 2**, **3 2 1 3**, **3 1 2 3**}

*Stern-en segidaren m=2 mailan oinarritutako permutazioen bateragarritasuna*

	1 2 3 3	2 1 3 3	1 3 2 3	2 3 1 3	1 3 3 2	2 3 3 1
3 3 2 1	1 2 3 3 3 3 2 1	2 1 3 3 3 3 2 1				
3 3 1 2	1 2 3 3 3 3 1 2	2 1 3 3 3 3 1 2				
3 2 3 1			1 3 2 3 3 2 3 1	2 3 1 3 3 2 3 1		
3 1 3 2			1 3 2 3 3 1 3 2	2 3 1 3 3 1 3 2		
3 2 1 3					1 3 3 2 3 2 1 3	2 3 3 1 3 2 1 3
3 1 2 3					1 3 3 2 3 1 2 3	2 3 3 1 3 1 2 3

*Stern-en segidaren*  $m=2$  mailan oinarritutako permutazioen bateragarritasuna

	1 2 3 3	2 1 3 3	1 3 2 3	2 3 1 3	1 3 3 2	2 3 3 1
3 3 2 1	class 1 system 1	class 1 system 4				
3 3 1 2	class 1 system 3	class 1 system 2				
3 2 3 1			class 2 system 1	class 2 system 4		
3 1 3 2			class 2 system 3	class 2 system 2		
3 2 1 3					class 3 system 1	class 3 system 4
3 1 2 3					class 3 system 3	class 3 system 2

Erreparatu m=2 mailako 'class'-en 'erritmo'ei:

**1 1 2 ...**  
**1 2 1 ...**

	1 2 3 3	2 1 3 3	1 3 2 3	2 3 1 3	1 3 3 2	2 3 3 1
3 3 2 1	1 2 3 3 3 3 2 1	2 1 3 3 3 3 2 1				
3 3 1 2	1 2 3 3 3 3 1 2	2 1 3 3 3 3 1 2				
3 2 3 1			1 3 2 3 3 2 3 1	2 3 1 3 3 2 3 1		
3 1 3 2			1 3 2 3 3 1 3 2	2 3 1 3 3 1 3 2		
3 2 1 3					1 3 3 2 3 2 1 3	2 3 3 1 3 2 1 3
3 1 2 3					1 3 3 2 3 1 2 3	2 3 3 1 3 1 2 3

Erreparatu '*Class*' bakoitzaren '*erritmo*'ari:

**1**   **1 2**   ...  
**1**   **2 1**   ...

BIDEOAK:

<https://www.youtube.com/watch?v=L23XB5djZxQ>      (class1)

<https://www.youtube.com/watch?v=pSluz12biZY>      (class2)

<https://www.youtube.com/watch?v=BDr78bEd50g>      (class3)

# Stern-en segidaren m=2 mailan oinarritutako

$\mathbb{Q}^+$ -ren zenbait zenbakitze sistema

	1 2 3 3	2 1 3 3	1 3 2 3	2 3 1 3	1 3 3 2	2 3 3 1
3 3 2 1	Stern-Brocot	?				
3 3 1 2	HCS	Bird				
3 2 3 1			Calkin-Wilf	?		
3 1 3 2			Yu Ting	driB		
3 2 1 3					?	?
3 1 2 3					?	?

*Class 1* eta *Class 2* saileko zenbakitze sistemen propietate nagusi bat:  
*mailakako alderantzizkotasuna*

class = 1			
system = 1			
1 1 2	1 2 3 3	1 2 3 3 4 5 5 4	1 2 3 3 4 5 5 4 5 7 8 7 7 8 7 5
1 2 1	3 3 2 1	4 5 5 4 3 3 2 1	5 7 8 7 7 8 7 5 4 5 5 4 3 3 2 1
system = 2			
1 1 2	2 1 3 3	3 3 1 2 5 4 4 5	5 4 4 5 2 1 3 3 8 7 5 7 7 5 7 8
1 2 1	3 3 1 2	5 4 4 5 2 1 3 3	8 7 5 7 7 5 7 8 3 3 1 2 5 4 4 5
system = 3			
1 1 2	1 2 3 3	1 2 3 3 4 5 4 5	1 2 3 3 4 5 4 5 5 7 7 8 5 7 7 8
1 2 1	3 3 1 2	4 5 4 5 1 2 3 3	5 7 7 8 5 7 7 8 1 2 3 3 4 5 4 5
system = 4			
1 1 2	2 1 3 3	3 3 2 1 5 4 5 4	5 4 5 4 3 3 2 1 8 7 7 5 8 7 7 5
1 2 1	3 3 2 1	5 4 5 4 3 3 2 1	8 7 7 5 8 7 7 5 5 4 5 4 3 3 2 1
class = 2			
system = 1			
1 1 2	1 3 2 3	1 4 3 5 2 5 3 4	1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5
1 2 1	3 2 3 1	4 3 5 2 5 3 4 1	5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1
system = 2			
1 1 2	2 3 1 3	3 5 1 4 3 4 2 5	5 8 2 7 4 5 3 7 4 7 1 5 5 7 3 8
1 2 1	3 1 3 2	5 2 4 3 4 1 5 3	8 3 7 5 5 1 7 4 7 3 5 4 7 2 8 5
system = 3			
1 1 2	1 3 2 3	1 4 3 4 2 5 3 5	1 5 4 5 3 7 4 7 2 7 5 7 3 8 5 8
1 2 1	3 1 3 2	4 1 4 3 5 2 5 3	5 1 5 4 7 3 7 4 7 2 7 5 8 3 8 5
system = 4			
1 1 2	2 3 1 3	3 5 2 5 3 4 1 4	5 8 3 8 5 7 2 7 4 7 3 7 4 5 1 5
1 2 1	3 2 3 1	5 3 5 2 4 3 4 1	8 5 8 3 7 5 7 2 7 4 7 3 5 4 5 1

*Class 1* eta *Class 2* sailen arteko beste propietate bat:  
*bit-reversal permutation (brp)*

## Helburu berriak:

### Zenbakitze sistema bakoitzean

- Zatiki bat emanaz gero, argitu zein den bere kokapena
- Kokapen bat emanaz gero, argitu zein den bere zatikia

Algoritmoak: ahalik eta azkarrenak.

### Aztertu zenbakitze sistema bakoitzaren ezaugarriak:

- **Zenbakitzaile**en segida
- **Izendatzaile**en segida
- **Zenbakitzaile** eta **izendatzaile**en segiden arteko erlazioak

### Aztertu zenbakitze sistemen arteko erlazioak:

- Permutazioak, adibidez