

Denboraren eremuan helburuetara orientatutako egokitzapena
errorearen ez-ohiko adierazpenak erabilita

Judit Muñoz¹ Elisabete Alberdi¹ David Pardo^{1,2,3}

¹Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), Leioa, Spain

²BCAM-Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, Spain

³IKERBASQUE, Basque Foundation for Science, Bilbao, Spain



July 13, 2016

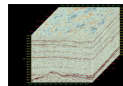
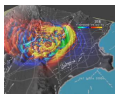
Contents

- 1 Sarrera
 - Motibazioa
 - Orain arte egindakoa (State-of-the-art)
 - Eredu problema
- 2 Helburuetara orientatutako egokitzapena
 - Formulazio bariazionala espazioan eta denboran
 - Problema primalak eta dualak
 - Errorearen adierazpenak
- 3 Helburuetara orientatutako egokitzapena errorearen ez-ohiko adierazpenak erabilita
- 4 Fintze estrategia
- 5 Zenbakizko emaitzak
- 6 Ondoriak eta etorkizuneko lana

Uhinen hedapenaren fenomenoak eta bere aplikazioak



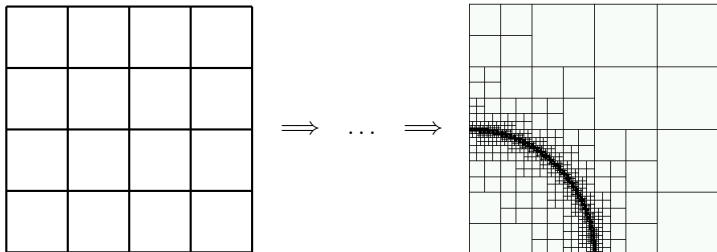
Arloa	Eredua	Aplikazioa
Aeronautika	Akustikoa	Hegazkinen osagaien zarata murriztu
Medikuntza	Akustikoa	Ultrasoinuen bidezko irudigintza
Sismologia	Elastikoa	Lurrikaren simulazioa
Irudigintza sismikoa	Elastikoa	Hidrokarburoen erauzketa
Telekomunikazioak	Elektromagnetikoa	Antenak, radareak eta sateliteen diseinua



Elementu Finituen Metodoa: Egokitzea

Elementu Finituen Metodoa: EDPen soluzio hurbilduak bilatzeko.

Egokitze algoritmoak: Elementu tamaina/hurbilketa-ordena.



Nola?: Tokiko errore-adierazleak erabiliz.

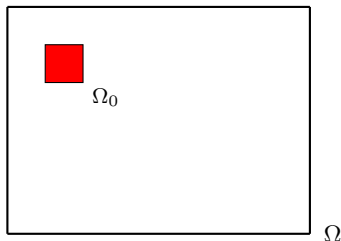
Helburua: Errore globala murriztea.

Helburuetara orientatutako egokitzapena

Soluzioa zehaztasunez hurbiltzea interes-kantitate jakin batean

Errorea: $e_h = u - u_h$

Interes-kantitatea: $l(e_h) = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} e_h \, dx$



Errorearen adierazpena

Errorearen adierazpen klasikoa

$$|l(e_h)| = |b(e_h, \varepsilon_h)| = \left| \int_{\Omega} g(e_h, \varepsilon_h) \right| \leq \sum_K \left| \int_K g_K(e_h, \varepsilon_h) \right| = \sum_K |b_K(e_h, \varepsilon_h)|$$

Goi-muga: Egokitzapena burutzeko irizpide nagusia.



S. Prudhomme and J. T. Oden.

On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 176(1): 313–331, 1999.

Errorearen adierazpena

Errorearen adierazpen berria

$$|l(e_h)| = |\tilde{b}(e_h, \tilde{\varepsilon}_h)| \leq \sum_K |\tilde{b}_K(e_h, \tilde{\varepsilon}_h)|$$

Goi-muga berria klasikoa baino finagoa da:

$$|l(e_h)| \leq \sum_K |\tilde{b}_K(e_h, \tilde{\varepsilon}_h)| \leq \sum_K |b_K(e_h, \varepsilon_h)|$$

Adierazpen berria: egokitze prozesuak hobetzeko



V. Darrigrand, D. Pardo and I. Muga

Goal-oriented adaptivity using unconventional error representations for the 1D Helmholtz equation,

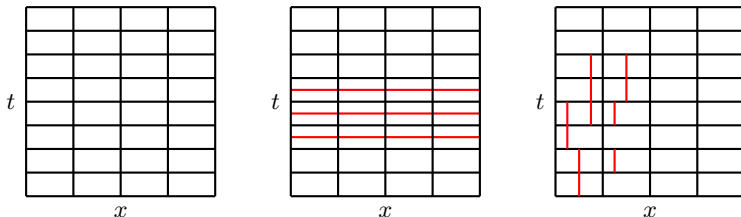
Computers & Mathematics with Applications, 69(9): 964 – 979, 2015.

Denboraren eremuko problemak

Gure helburu nagusia

Errorearen adierazpen berria denboraren eremuko problemetara zabaltzea.

Espazio-denbora sareen egokitzapena denboran mugitzen den eskema (time-marching scheme) batean oinarrituta



W. Bangerth, M. Geiger and R. Rannacher

Adaptive Galerkin finite element methods for the wave equation,
Computational Methods in Applied Mathematics, 10(1): 3 – 48, 2010.

Dimentsio bakarreko uhin ekuazioa

Formulazio sendoa

Izan bitez $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ eta $I = (0, T] \subset \mathbb{R}$, hurrengo problema kontsideratuko dugu:

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = f & \text{in } \Omega \times I \\ u(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times I \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Soluzioa: Korda mugikorra (espazio-eremuko muturretan finko).

Zer behar dugu?

Helburuetara orientatutako egokitzapena burutzeko:

- **Problema duala** \implies espazio-denbora puntu bakoitzak $l(e_h)$ -n duen eraginari buruzko informazioa.
- **Errorearen adierazpen formula** $\implies l(e_h)$ mugatzeko.

Problemaren formulazio bariazional bat behar dugu **aldagai bietan**: espazioan eta denboran.

Formulazio bariazionala

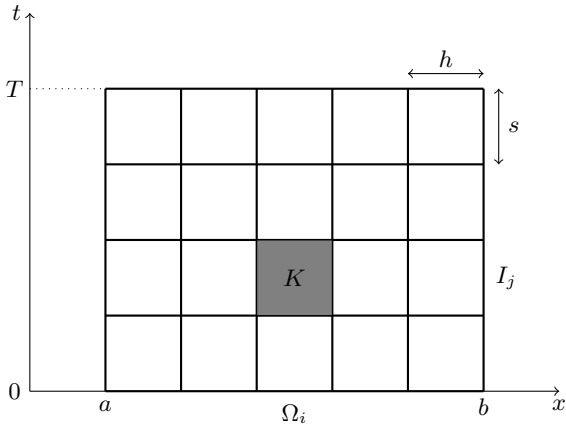
$$\begin{cases} \text{Aurkitu } U^* = \{u^*, v^*\} \text{ non} \\ B(U^*, \Psi) = F(\Psi), \forall \Psi = \{\psi, \varphi\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B(U, \Psi) := & \int_I \int_{\Omega} u_t \psi \, dx dt - \int_I \int_{\Omega} v \psi \, dx dt + \int_{\Omega} u(x, 0) \psi(x, 0) \, dx + \\ & + \int_I \int_{\Omega} v_t \varphi \, dx dt + \int_I \int_{\Omega} \alpha^2 u_x \varphi_x \, dx dt + \int_{\Omega} v(x, 0) \varphi(x, 0) \, dx \end{aligned}$$

$$F(\Psi) := \int_{\Omega} u_0(x) \psi(x, 0) \, dx + \int_I \int_{\Omega} f \varphi \, dx dt + \int_{\Omega} v_0(x) \varphi(x, 0) \, dx$$

Diskretizazioa

Eremuaren partiketa



Problema primalak

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aurkitu } U^* = \{u^*, v^*\} \text{ and } U_{hs}^* = \{u_{hs}^*, v_{hs}^*\} \text{ non} \\ B(U^*, \Psi) = F(\Psi), \forall \Psi = \{\psi, \varphi\} \\ B(U_{hs}^*, \Psi_{hs}) = F(\Psi_{hs}), \forall \Psi_{hs} = \{\psi_{hs}, \varphi_{hs}\} \end{array} \right.$$

Problema dualak

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aurkitu } \Psi^* = \{\psi^*, \varphi^*\} \text{ and } \Psi_{hs}^* = \{\psi_{hs}^*, \varphi_{hs}^*\} \text{ non} \\ B(U, \Psi^*) = L(U), \forall U = \{u, v\} \\ B(U_{hs}, \Psi_{hs}^*) = L(U_{hs}), \forall U_{hs} = \{u_{hs}, v_{hs}\} \end{array} \right.$$

Amaierako funtzionala $L(\cdot)$: soluzioaren ezaugarri fisikoak adierazi.

Errorearen adierazpen klasikoa

Problema **primalaren** eta **dualaren** erroreak:

$$e_{hs} = U^* - U_{hs}^* \quad \varepsilon_{hs} = \Psi^* - \Psi_{hs}^*$$

Galerkinen ortogonalitasuna: $B(e_{hs}, \Psi_{hs}) = 0, \quad \forall \Psi_{hs}$

Errorearen adierazpen klasikoa

$$|L(e_{hs})| = |B(e_{hs}, \varepsilon_{hs})| \leq \sum_K |B_K(e_{hk}, \varepsilon_{hs})|$$

Idea nagusia: $L(e_{hs})$ eremu osoko integral baten bitartez adieraztea.

Errorearen adierazpen berria

Forma bilineal berria: $\tilde{B}(\cdot, \cdot)$

Ez-ohiko problema duala

$$\begin{cases} \text{Aurkitu } \tilde{\epsilon}_{hs} \text{ non} \\ \tilde{B}(U, \tilde{\epsilon}_{hs}) = L(U) - B(U, \Psi_{hs}^*), \forall U \end{cases}$$

Errorearen adierazpen berria

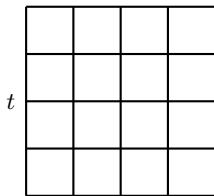
$$|L(e_{hs})| = |\tilde{B}(e_{hs}, \tilde{\epsilon}_{hs})| \leq \sum_K |\tilde{B}_K(e_{hs}, \tilde{\epsilon}_{hs})|$$

Helburua:

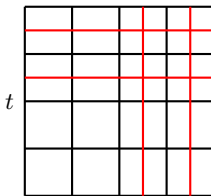
- Forma bilineal aproposak aurkitu.
- Errorearen goi-muga finagoak lortu.
- Egokitze prosezua burutzeko irizpide hobeko bat lortu.

Helburuetara orientatutako h - eta s -egokitzapenak

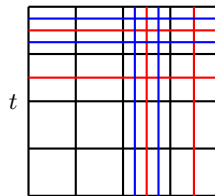
Tensore-biderkadura motako fintzeak:



Sare lodia



x



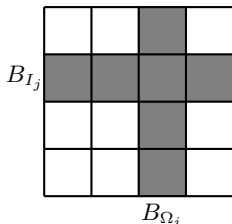
Sare egokitua

Sare fina: erroreak estimatzeko.

Helburuetara orientatutako h - eta s -egokitzapenak

Tokiko ekarpenak bereizita dituen goi-muga:

$$|L(e_{hs})| = |B(e_{hs}, \varepsilon_{hs})| \leq \frac{1}{2} \sum_i |B_{\Omega_i}(e_{hs}, \varepsilon_{hs})| + \frac{1}{2} \sum_j |B_{I_j}(e_{hs}, \varepsilon_{hs})|$$



Tolerantziak: tol_1, tol_2

Gelditzeko irizpidea: $\frac{|L(e_{hs})|}{|L(U)|}$

Fintzeko irizpideak:

$$\frac{|B_{\Omega_i}(e_{hs}, \varepsilon_{hs})|}{M} \quad \frac{|B_{I_j}(e_{hs}, \varepsilon_{hs})|}{M}$$

$$M = \max \left(\max_{\Omega_i} |B_{\Omega_i}(e_{hs}, \varepsilon_{hs})|, \max_{I_j} |B_{I_j}(e_{hs}, \varepsilon_{hs})| \right)$$

Era berean $\tilde{B}(\cdot, \cdot)$ erabilita

Eredu problema

Datuak: $\Omega \times I = (0, 2) \times (0, 5]$, $f = 0$, $\alpha = 1$, $u_0(x) = \sin(\pi x/2)$, $v_0 = 0$

Amaierako funtzionala: $L(u) = \int_{3.75}^5 \int_{1.5}^2 u(x, t) dx dt$

Elementu kopurua: 2^4 (sare lodia) and 2^{14} (sare fina)

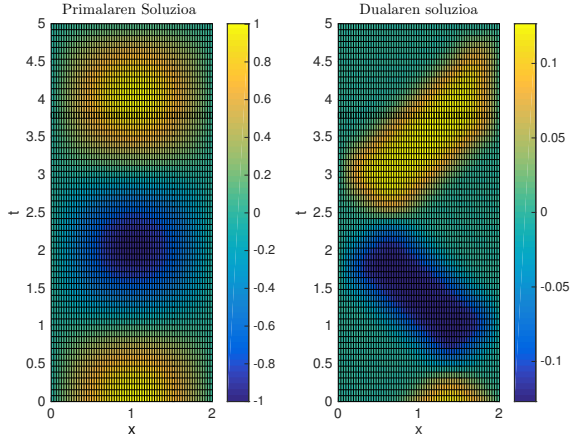
Tolerantziak: $tol_1 = 0.001\%$, $tol_2 = 10\%$

Hurbilketa: Zatika jarraiak diren funtzio linealak

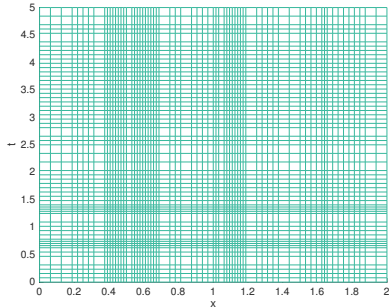
Forma bilineal berria: $\tilde{B}(U, \Psi) := \int_I \int_{\Omega} u_x \varphi_x dx dt + \int_I \int_{\Omega} v \psi dx dt$

(Simetrikoa eta positiboki definitua)

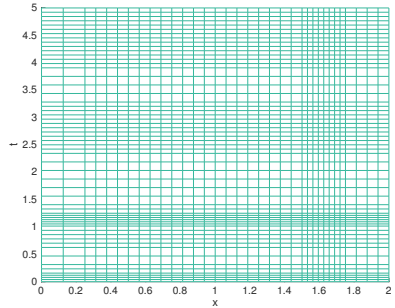
Erreferentzia soluzioak



Sare egokituak



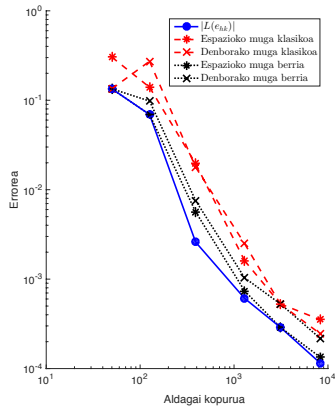
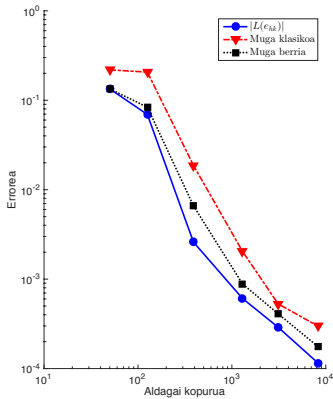
Irizpide klasikoa ($B(\cdot, \cdot)$ erabilia)



Irizpide berria ($\tilde{B}(\cdot, \cdot)$ erabilia)

Goi-mugak

Irizpide klasikoak: $B(\cdot, \cdot)$



Era berean $\tilde{B}(\cdot, \cdot)$ erabilia

Ondoriak eta etorkizuneko lana

Ondoriak

- Helburuetara orientatutako egokitzapena burutzeko errearen adierazpen berri bat proposatu dugu dimentsio bakarreko uhin ekuaziorako.
- Goi-muga klasikoa eta berria konparatu ditugu.
- Goi-muga berria klasikoa baino finagoa dela ikusi dugu.

Etorkizuneko lana

- Beste forma bilineal batzuk aztertzea.
- Discontinuous Petrov-Galerkinen metodoetara orokortzea (konputazionalki azkarragoak).
- 2D eta 3D problemetara aplikatzea.