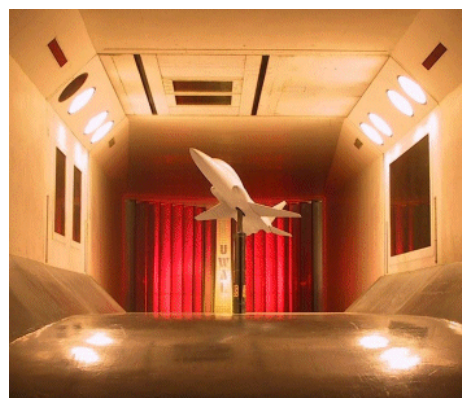


4. ANTZEKOTASUNA ETA AZTERKETA DIMENTSIONALA

- 4.1. Antzekotasuna.
 - 4.2. Zenbaki adimentsionalak
 - 4.2.1. Reynolds-en zenbakia
 - 4.2.2. Froude-ren zenbakia
 - 4.2.3. Mach-en zenbakia / Cauchy-ren zenbakia
 - 4.2.4. Euler-ren zenbakia
 - 4.2.5. Weber-ren zenbakia
 - 4.3. Erabateko antzekotasuna
 - 4.4. Azterketa dimentsionala
 - 4.4.1. Berreduren biderketaren metodoa
 - 4.4.2. Buckingham-en pi teorema
- Ariketak

Sistema erreal gehienetan fluidomekanikako ekuazio teorikoak oso konplexuak suertatzen dira problemak matematikoki askatzeko (eta batzutan ez dira nahikoak planteatzen diren arazoak askatzeko). Hala ere, azken urteotan ordenagailuen garapena dela eta, orain arte matematikoki aztertu ezin ziren problemak gaur egun nahiko era errazean ikertzeko aukera dago. Baina gaur egun, oraindik, problema asko eta asko esperimentalki baino ezin dira aztertu. Teoria puru eta hutsa emaitzak ebatzi eta auresateko gai ez denean, probak eta saiakuntzak egitera jo behar izaten da.

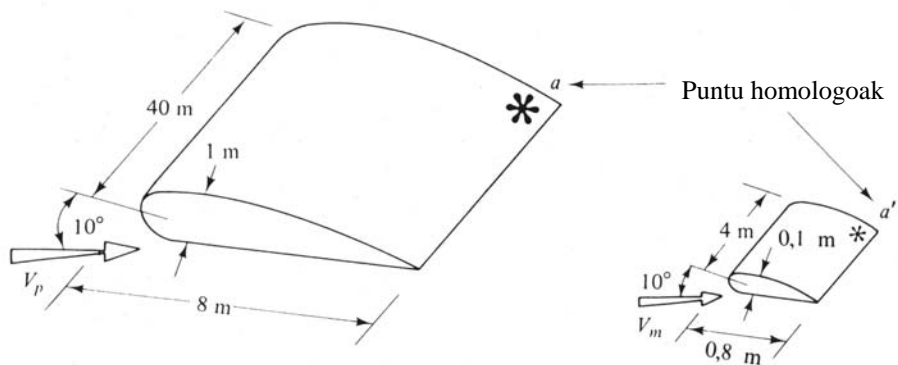
Saiakuntzak normalean eskala laburtuetako erduekin egiten dira. Adibidez, hegazkin, ontzi, urpekuntzi, turbina, presa, portu edo kai,... Beste batzuetan, erdua prototipoaren eskala berean egin daiteke, berau txiki samarra denean; adibidez, ponpa hidrauliko ez oso handien kasuan. Batzuetan ordea, erdua handitzea ere komeniko da prototipoa oso txikia delako; adibidez, autoen karburadorearen edota ponpa hidrauliko txiki baten kasuan. Erduak, material anitzez egiten dira: zur, eskaiola, metal, hormigoi, plastiko, eta abarrez. Kasu bakoitzean, gehien komeni dena hautatuko da. Ez da derrigorrezkoa prototipoak erabili behar duen fluido berberarekin saiakuntzak egitea. Beste batekin ere egin daitezke, bai egokiagoa delako edota beste bitartekorik ez dugulako. Ura eta airea dira normalean erabiltzen diren fluidoak; izan ere, esku-eskura daudenak baitira.



Urtero munduko potentzia handiek diru asko erabiltzen dute mota desberdinetako saiakuntzetan. Horren truke, iristezinak ziratekeen beste helburu batzuk lortu dituzte, eta prototipoen ekoizpenean diru eta denbora asko aurreztu dute.

4.1. Antzekotasuna

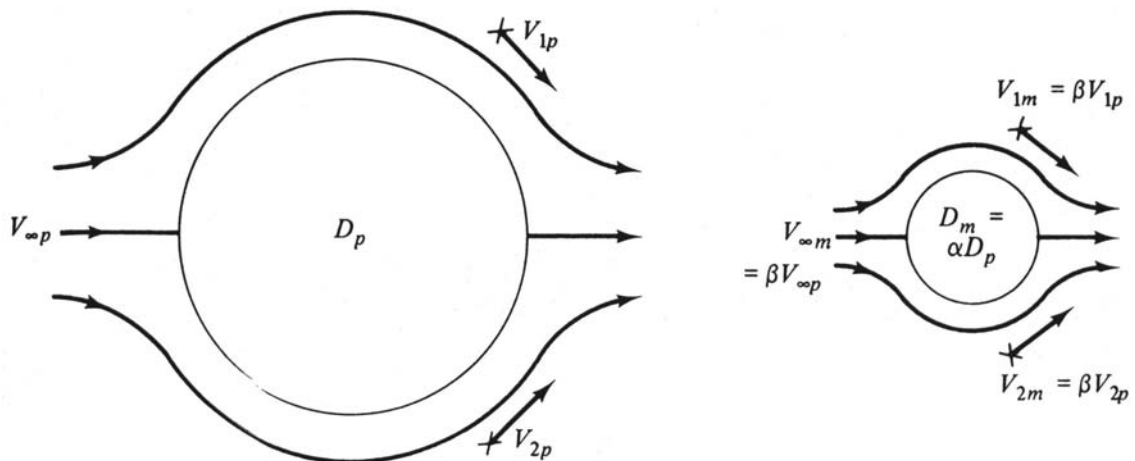
Prototipo batek eskala naturalean jasotzen dituen efektuak aztertzeko, prototipoa baino txikiagoa (handiagoa) den eredu bat prestatzen dugu. Eredutik ateratzen ditugun ondorioak prototipoan aplikagarriak izateko, ereduak eta prototipoak baldintza batzuk bete behar dituzte. Baldintza hauek antzekotasun-irizpideen bitartez finkatzen dira. Antzekotasun-mota desberdinak daudenez, beraiekin loturiko baldintzak ere desberdinak izango dira.



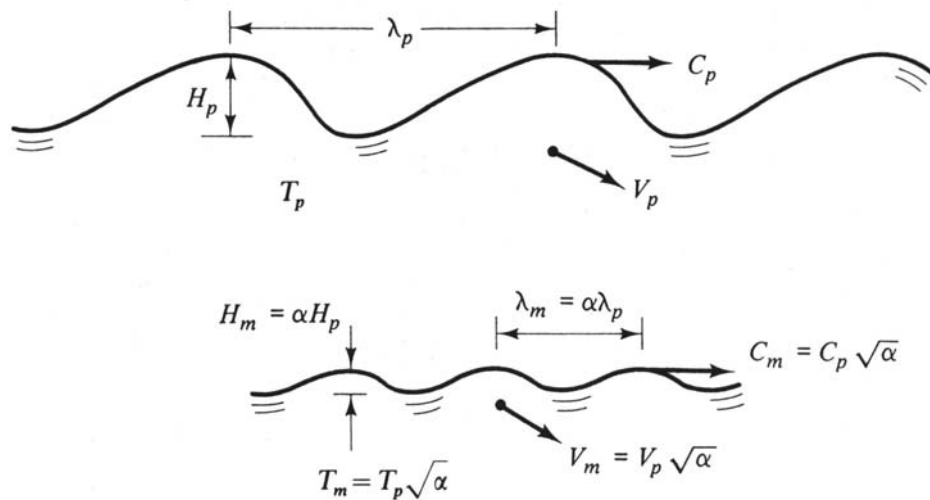
- **Antzekotasun geometrikoa.** Prototipoa eta ereduak geometrikoki antzekoak izan behar dira. Hau da, bi sistemek forma berdina izan behar dute, eta gainera dimentsioak (luzerak, azalerak eta bolumenak) proportzionalak izan behar dira. Horren ondorioz, erlazio hauek bete behar dira:

$$\frac{l_p}{l_e} = \lambda \quad \frac{S_p}{S_e} = \lambda^2 \quad \frac{V_p}{V_e} = \lambda^3,$$

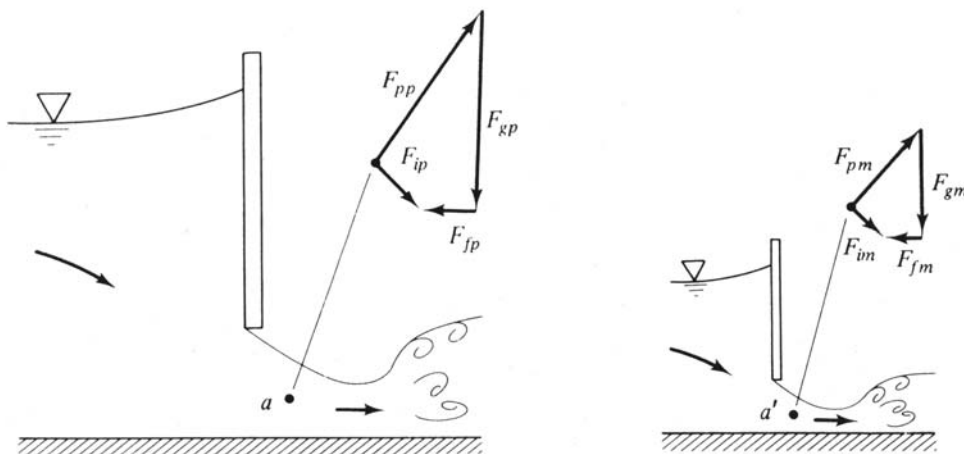
non l , S eta V prototipoa eta ereduaren luzerak, azalerak eta bolumenak diren. λ prototipoa eta ereduaren arteko proportzionaltasun konstantea da. Erlazio hauek betetzen badira, prototipoa eta ereduaren angeluak ere berdinak izango dira.



- **Antzekotasun zinematikoa.** Prototipoaren eta ereduaren fluxuak zinematikoki antzekoak izateko, puntu baliokideen abiadurek norabide berdina eta modulu proportzionalak izan behar dituzte. Moduluen arteko proportzionaltasuna puntu guztietarako konstantea izan behar da. Horrela, bi sistemetan fluxu-lerroen banaketak antzekoak izango dira. Gorputz desberdinen mugek fluxu-lerroak eratu egiten dituztela kontuan hartzen badugu, zinematikoki antzekoak diren fluxuak geometrikoki ere antzekoak izango dira. Gainera, antzekotasun zinematikoa egoteko, fluxuen erregimenak derrigorrez berdinak izan behar dira. Adibidez, prototipoan barrunketarik ez badago, ereduari holakorik ez da azaldu behar.



- **Antzekotasun dinamikoa.** Prototipoaren eta ereduaren fluxuak dinamikoki antzekoak izateko, puntu baliokideen indar-banaketak mota berdinekoak izan behar dira. Horretaz gain, puntu baliokideetako indar-banaketak paraleloak izan behar dira, eta beraien moduluak proportzionalak. Puntu guztietan indar-banaketaren arteko proportzionaltasuna konstantea izan behar da.



Antzekotasunen artean baldintzak gogorrenak ezartzen dituen antzekotasun dinamikoa da. Bi fluxuak dinamikoki antzekoak izateko derrigorrez geometrikoki eta zinematikoki antzekoak izan behar dira.

4.2. Zenbaki adimentsionalak

Fluidoko edozein elementuren gaineko indarrak hauek izan daitezke: indar grabitatorioa (F_G), presioak eragindako indarra (F_P), indar elastikoa (F_E), gainazal-tentsioa (F_T) eta indar biskosoa (F_V). Fluidoareneko indar ordezkaria zero ez bada, elementua azeleratuta egongo da. Kasu horretan, elementuaren oreka aztertu nahi badugu, elementuarekin batera azeleraturik dagoen erreferentzi sistema ez-inertzial batean aztertu behar dugu higidura. Hori egiten badugu, inerti indar bat definitu behar da: $F_I = -ma$. Era honetan, oreka-baldintza matematikoki honela adieraziko dugu:

$$F_G + F_P + F_V + F_E + F_T + F_I = 0.$$

Fluidomekanikako edozein problematan parte har dezaketen magnitude fisikoak zortzi baino ez dira: luzera (L), abiadura (V), dentsitatea (ρ), grabitatea (g), presio-diferentzia (ΔP), biskositate dinamikoko koefizientea (μ), elastikotasun-modulua (E) eta gainazal-tentsioaren koefizientea (γ). Horrela, fluidoaren gaineko indarrak magnitude hauen funtzioan adierazi ahal izango ditugu:

$$\begin{array}{lll} F_G \rightarrow \rho L^3 g, & F_P \rightarrow \Delta P L^2, & F_V \rightarrow \mu V L, \\ F_E \rightarrow E L^2, & F_T \rightarrow \gamma L, & F_I \rightarrow \rho V^2 L^2. \end{array}$$

Orekaren ekuazioan indarren adierazpenak ordezkatzeko baditugu, aldagaiak erlazionatzen dituen funtzio bat agertuko da:

$$f(L, \Delta P, \rho, g, V, \mu, E, \gamma) = 0.$$

Hala ere, magnitude huen artean hiru baino ez dira oinarritzkoak (masa, luzera eta denbora).

Fluxuaren ezaugarrien arabera, fluidoaren gaineko indar desberdinek eragin handiagoa edo gutxiago izango dute. Horrela, kasu gehienetan fluxuan eraginik handiena indar bakar batek izango du (nahiz eta beste guztiak bertan egon). Kasu horretan, indar hori inerti indarrarekin erlaziona dezakegu, eta era honetan zenbaki adimentsional bat sor dezakegu. Zenbaki adimentsionalak oso interesgarriak dira fluxuaren egoerak aztertzeko eta askotan erabiltzen dira. Baina sor daitezkeen zenbaki adimentsional guztiak ez dira lortzen indarrak erlazionatuz, zenbait zenbaki adimentsional beste metodoen bidez lor daitezke. Jarraian indarren erlazioen bitartez lorturiko zenbaki adimentsional garrantzitsuenak aztertuko ditugu.

4.2.1. Reynolds-en zenbakia

Biskositatearen efektuak besteak baino garrantzitsuak diren kasuetan, indar biskosoa ez diren beste indarrak arbuiatzen ditugu. Horrela, inerti indarra eta indar biskosoaren arteko erlazioa kalkulatzeko badugu, ondoko adierazpena lortzen dugu:

$$Re = \frac{F_I}{F_V} = \frac{L \cdot V \cdot \rho}{\mu} = \frac{L \cdot V}{\nu},$$

non V fluxuaren abiadura adierazgarriena den, eta L fluxuaren dimentsio lineal adierazgarriena (diametroa, normalean). Erlazio honi *Reynolds-en zenbakia* deituko diogu, eta Re ikurrarekin adieraziko dugu. Zenbakiaren izena Osborne Reynolds (1842-1912) ingeniari eta fisikari britainiarraren omenez jarri zen, berak aurkitu baitzuen 1880 hamarkadan.

Beraz, biskositate-indarrari dagokionez, prototipoa eta bere eredia antzekoak izateko Re berdina izan behar dute. Hortaz, indar biskosoak nagusiak direnean, Re berdina izatea izango da antzekotasun dinamikorako baldintza. Halaxe gertatuko da guztiz beterik dagoen hodi batean zeharreko fluxuan, edo konprimagarritasuna arbuia garria den abiadura higitzen den hegazkin baten kasuan. Aztertzen ari garen sisteman Reynolds-en zenbakiaren balioa gero eta handiagoa bada, indar biskosoen garrantzia txikiagoa izango da, eta alderantziz.

4.2.2. Froude-ren zenbakia

Aztertu nahi dugun prototipoan grabitatearen indarraren efektua garrantzitsua denean, inertzi indarra eta indar grabitatorioaren arteko erlazioa honela adierazten da:

$$Fr^2 = \frac{F_I}{F_G} = \frac{V^2}{gL},$$

non L fluxuaren dimentsio lineal adierazgarriena den, eta V fluxuaren abiadura adierazgarriena. Fr delakoa *Froude-ren zenbakia* da, eta ikusten denez, indarren arteko zatiketaren karratua da. Arrazoi historikoengatik egiten da honela, eta ondorioz, bere balioa haxe izango da:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

Zenbaki hau William Froudek (1810-1879), ingeniari britainiarrak, eta bere semeak, Robert Edmund Froudek, aurkitu zuten. Froude-ren zenbakia gainazal askea daukaten sistemetan aztertzen da normalean: kanaletako zirkulazioa aztertzean, portuak eraikitzean, ontziak diseinatzean, urtegien eta isurtegien analisisian, etab. Sistema batean Froude-ren zenbakiaren balioa gero eta handiagoa bada, indar grabitatorioaren garrantzia handiagoa izango da, eta alderantziz.



4.2.3. Mach-en zenbakia / Cauchy-ren zenbakia

Gure prototipoaren azterketan fluidoaren konprimagarritasuna garrantzitsua bada, inertzi indarra eta indar elastikoa erlazionatu behar ditugu. Erlazio horri erro karratua aplikatzen badiogu, *Mach-en zenbakia* ateratzen da. Zenbaki honen izena Ernst Mach (1838-1916) zientzialari austriarraren omenez jarri zen, berak aurkitu baitzuen 1870 hamarkadan. Zenbakiaren balioa honela kalkulatu da:

$$M = \sqrt{\frac{F_I}{F_E}} = \frac{V}{a},$$

non V fluidoaren abiadura den eta a soinuak fluido horretan duen abiadura. Normalean, Mach-en zenbakiaren bidez bi motatako fluxuak definitzen dira. $M < 1$ denean fluxua *azpisonikoa* da, eta $M > 1$ denean *supersonikoa*. $M < 0.3$ bada, konprimagarritasunaren efektuak arbuiagarriak direla jotzen da. Gure sisteman Mach-en zenbakiaren balioa gero eta handiagoa bada, indar elastikoen garrantzia handiagoa izango da, eta alderantziz. Adibidez, turbinetan konpresio handiak gertatzen direnez, beraien diseinuan Mach-en zenbakia oso inportantea da.

Indar elastiko eta inerti indarraren arteko erlazioari erro karratua ez badiogu aplikatzen, beste zenbaki adimentsional bat lortzen da:

$$Ca = \frac{F_I}{F_E} = \frac{\rho V^2}{E},$$

non E konstante elastikoa den. Zenbaki honi *Cauchy-ren zenbakia* deritzo, Augustin Cauchy (1789-1857) matematikari frantsesaren omenez. Logikoa denez, Cauchy-ren zenbakia eta Mach-en zenbakia erlazionatuta daude, hain zuzen, era honetan:

$$Ca = M^2$$

4.2.4. Euler-ren zenbakia

Prototipoan presio indarren eragina nabarmena denean, presio indarra eta inerti indarra erlazionatuz lortzen den zenbaki adimentsionala aztertzen da:

$$Eu = \frac{F_I}{F_p} = \frac{\rho V^2}{P},$$

non P presioa den. Zenbaki honi *Euler-ren zenbakia* deritzo, Leonhard Euler (1707-1783) matematikari suitzarraren omenez. Berak fluidomekanikaren lehenengo lan analitikoak burutu zituen, baina zenbakia ez zuen berak aurkitu.

4.2.5. Weber-ren zenbakia

Aipatuko dugun azken zenbaki adimentsionalak gainazal-indarra eta inerti indarra erlazionatzen ditu:

$$We = \frac{F_I}{F_T} = \frac{\rho L V^2}{\gamma},$$

non γ gainazal-tentsioaren koefizientea den. Zenbaki honi *Weber-ren zenbakia* deritzo, Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) fisikari alemaniarraren omenez. Ikertutako sisteman Weber-ren zenbakiaren balioa gero eta handiagoa bada, gainazal-tentsioaren garrantzia txikiagoa izango da, eta alderantziz.

4.3. Erabateko antzekotasuna

Ikusi dugunez, fluidoaren gaineko bost indarrentzako zenbaki adimentsional bana defini daiteke. Beraz, oreka-baldintzako ekuaziotik, funtzio bat lortuko dugu zenbaki adimentsionalak erlazionatuz:

$$F_G + F_P + F_V + F_E + F_T + F_I = 0 \Rightarrow f(Fr, Eu, Re, M, We) = 0.$$

Hau da, sistema guztietan bost zenbaki adimentsionalak beti erlazionaturik egongo dira.

Prototipoa eta ereduaren artean antzekotasun perfektua egoteko ondoko bost ekuazioak bete behar dira aldi berean:

$$Re_p = Re_e \quad Fr_p = Fr_e \quad M_p = M_e \quad Eu_p = Eu_e \quad We_p = We_e.$$

Bost ekuazioak betetzen badira, indar-banaketa guztiak baliokideak izango dira, eta antzekotasun dinamikoa erabatekoa izango da. Hala ere, txikitutako ereduetan bost ekuazioak batera betetzea ezinezkoa da. Bost ekuazioak bete ahal izateko, erdua eta prototipoaren arteko eskala 1/1 izan behar da. Horregatik, antzekotasun dinamikoa bermatzeko normalean bost ekuazio horietatik ekuazio bakarra ezartzen da.

Bestalde, sistema guztietan presio-diferentzia beti garrantzitsua izango dela kontuan hartu behar da. Beraz Euler-ren zenbakiak beti berdindu behar izango ditugu. Baina beste lau indarretatik normalean hiru arbuizaten ditugunez, ondoko lau egoeren aurrean egon gaitezke:

$$f(Eu, Fr) = 0 \quad f(Eu, Re) = 0 \quad f(Eu, M) = 0 \quad f(Eu, We) = 0.$$

Eta ondorioz, beste zenbakiak berdintzean, Euler-ren zenbakiak zuzenean berdinduta geratuko dira.

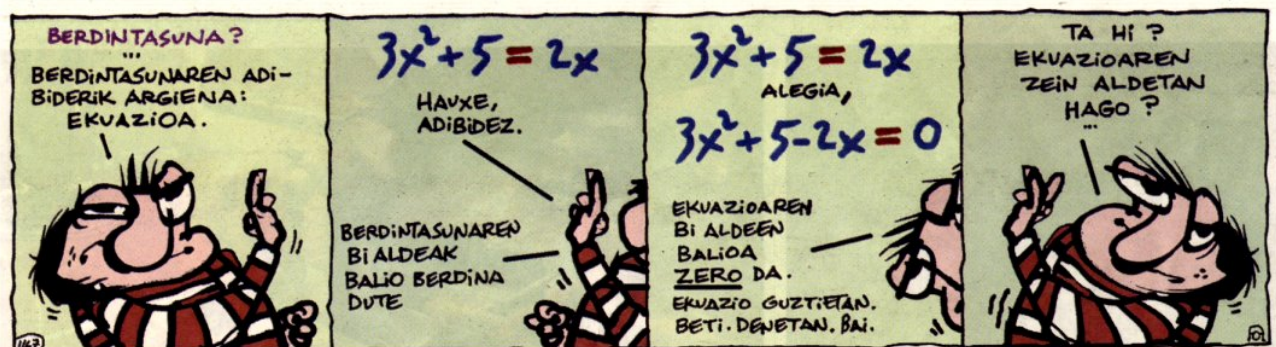
Adibidez, hegazkin baten hegoaren profila haize-tunelean aztertu nahi dugu. Kasu honetan, gainazal-tentsioaren efektua hegoaren gainean arbuigarria da. Bestalde, airea konprimazina suposatzen bada, indar elastikoak ere mesprezagarriak dira. Indar grabitatorioak ez du korrontean inolako aldaketa nabarmenik sortzen, hortaz, bera ere alboratzen dugu. Horren ondorioz, indar biskosoak baino ez dira geratzen. Hortaz, antzekotasun dinamikoa bermatzeko, prototipoa eta ereduaren Reynolds-en zenbakiak berdindu behar izango ditugu. Hori eginez, Euler-ren zenbakiak ere berdinduta geratuko dira.

4.4. Azterketa dimentsionala

Dakigunez, ekuazio fisikoen batugai guztiek dimentsio berdinak izan behar dituzte. Hau da, ekuazio fisikoak dimentsionalki koherenteak izan behar dira. Propietate hau erabiliz, magnitude bat beste batzuekin nola erlazionatzen den zehaztu daiteke. Hala ere, analisi dimentsionalaren bitartez inoiz ez dugu lortuko magnitude fisikoen arteko ekuazio zehatzik.

ZAKILIXUT

© Olariagak



4.4.1. Berreduren biderketaren metodoa

Analisi dimentsionalean erabiltzen den metodorik sinpleena berreduren biderketaren metodoa da. Adibide baten bidez, metodoa nola aplikatzen den hobeto ikusiko dugu.

Demagun hodi horizontal batean fluxu biskosoa daukagula. Bertako luzera-unitateko presio-galera beste magnitudeekin zelan erlazionatzen den ikusiko dugu. Sistema honetan parte hartzen duten magnitude fisikoak ondoko hauek dira: μ biskositate-koefizientea, Q emaria eta R erradioa. Orduan, luzera-unitateko presio-galera funtzio baten bidez magnitude hauekin erlazionatuko dugu:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = f(\mu, Q, R).$$

$f(\mu, Q, R)$ funtzioa potentzien bidez adierazten badugu, era honetan geratuko da:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} \propto \mu^a Q^b R^c.$$

Magnitude bakoitzaren dimentsioak honako hauek dira:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} \rightarrow ML^{-2}T^{-2} \quad \mu \rightarrow ML^{-1}T^{-1} \quad Q \rightarrow L^3T^{-1} \quad R \rightarrow L.$$

Dimentsio hauek $f(\mu, Q, R)$ delakoan ordezkatzeko baditugu:

$$ML^{-2}T^{-2} = (ML^{-1}T^{-1})^a (L^3T^{-1})^b L^c.$$

Adierazpena sinplifikatuz, dimentsioen indizeak berdindu daitezke eta ondoko hiru ekuazio hauek lortzen dira:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ -a + 3b + c &= -2 \\ -a - b &= -2 \end{aligned}$$

Ekuazio sistema honetatik, balio hauek ateratzen dira: $a = 1$, $b = 1$ eta $c = -4$. Beraz, hemendik ondoko erlazioa ageri da:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} \propto \mu \cdot Q \cdot R^{-4} = \frac{\mu \cdot Q}{R^4}$$

Eragina duten aldagai guztiak kontuan hartzea garrantzitsua da, berori soilik esperientziatik jakin daitekeelarik. Azterketa dimentsionalaren bidez ez dira emaitza osoak ateratzen, baina emaitza partzialek ere informazio handia eman dezakete: joerak, mendekotasunak, eta abar.

4.4.2. Buckingham-en pi teorema

Azterketa dimentsionalaren metodoa erabiltzean, erlazionatu nahi dugun aldagai-kopurua hiru baino handiagoa bada, berreduren biderketaren metodoa ez da egokia. Holako kasuetan Edgar Buckingham-ek (1867-1940) proposatutako teorema eta metodologia erabil daiteke.

Demagun n aldagai fisikoen arteko erlazioa aurkitu nahi dugula. Aldagaiak x_i ikurrekin izendatzen baditugu, honako funtzioa bilatuko dugu:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

n aldagai horiek m oinarrizko magnitude fisikoen funtzioan deskonposa ditzakegu. Horrela, Pi teorema erlazio hori sinplifika daitekeela eta $(n-m)$ zenbaki adimentsionalen funtzioan idatz daitekeela frogatzen du:

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0,$$

non Π_i guztiak aipatutako zenbaki adimentsionalak diren. Zenbaki adimentsional hauek x_i aldagaien konbinazio adimentsional independenteak dira.

Teoremaren erabilpen praktikoa adibide baten bidez azalduko dugu. Bertan, eman beharreko pausuak garbiago ikusiko dira.

A.- Arazo fisikoa aztertu eta aldagaiak identifikatu

Demagun hodi batean gertatzen den luzera unitateko karga-galera aztertu nahi dugula. Esperientziari esker, fenomeno fisiko honetan eragiten duten aldagai fisikoak zeintzuk diren jakin ahal izango dugu. Kasu konkretu honetan:

- | | | |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ○ W_{rp}/L : interesatzen zaigun aldagaia. | [kg/m ² s ²] | [ML ⁻² T ⁻²] |
| ○ D : hodiaren diametroa | [m] | [L] |
| ○ k : hodiaren zimurtasuna | [m] | [L] |
| ○ v : fluxuaren abiadura | [m/s] | [LT ⁻¹] |
| ○ μ : fluidoaren biskositatea | [kg/ms] | [ML ⁻¹ T ⁻¹] |
| ○ ρ : fluidoaren dentsitatea | [kg/m ³] | [ML ⁻³] |

Beraz, kasu honetan fenomeno fisikoan parte hartzen duten aldagai-kopurua $n = 6$ izango da, eta oinarrizko magnitudeak $m = 3$. Oinarrizko magnitude fisikoak masa, luzera eta denbora dira.

B.- Zenbaki adimentsionalen kopurua finkatu.

Esan bezala, sor daitezkeen zenbaki adimentsionalak $n-m$ izango dira. Horretarako, n aldagai fisikoen artean m aukeratu behar ditugu. Aukeraketa egiteko irizpidea hau da: m aldagai horiek ezin dute talde adimentsionalik sortu. Aukeraketa desberdinak egin daitezke, hala ere, bukaerako emaitza berdina izango da.

Gure adibidean, v , D eta ρ aldagaiek talde adimentsionalik ezin dute osatu. Orduan, erreferentziazko aldagai modura hartuko ditugu.

Nahiz eta edozein aukera baliagarria izan, talde independente hori aukeratzeko orduan ahalik eta aldagai sinpleenak (magnitudeen ikuspuntutik) eta orokorrenak aukeratzeko saiaturako gara. Aukeraketa egitean, lortu nahi dugun magnitude fisikoa (W_{rp}/L gure kasuan) inoiz ez dugu hartuko.

C.- Zenbaki adimentsionalak kalkulatu

Orduan, zenbaki adimentsionalak sortzeko, aukeratutako erreferentziazko aldagaiak berreduren biderketa baten bidez adieraziko ditugu. Berreduren biderketa fenomeno fisikoaren beste

aldagaiekin biderkatuko dugu, banan banan, eta bakoitzarekin osa daitekeen zenbaki adimentsionala kalkulatu dugu beharrezkoak diren berretzaileak erabiliz.

$$\Pi_1 = v^a \rho^b D^c k$$

$$M^0 L^0 T^0 = (LT^{-1})^{a_1} (ML^{-3})^{b_1} (L)^{c_1} L$$

$$(M) \quad 0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$

$$(T) \quad 0 = -a_1 \qquad a_1 = 0$$

$$(L) \quad 0 = a_1 - 3b_1 + c_1 + 1 \qquad c_1 = -1 \qquad \Rightarrow \Pi_1 = k/D$$

$$\Pi_2 = v^a \rho^b D^c \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = (LT^{-1})^{a_2} (ML^{-3})^{b_2} (L)^{c_2} L$$

$$(M) \quad 0 = b_2 + 1 \qquad b_2 = -1$$

$$(T) \quad 0 = -a_2 - 1 \qquad a_2 = -1$$

$$(L) \quad 0 = a_2 - 3b_2 + c_2 - 1 \qquad c_2 = -1 \Rightarrow \Pi_2 = \mu/\rho v D = Re^{-1} \text{ edo } \Pi_2 = Re$$

$$\Pi_3 = v^a \rho^b D^c W_{rp}/L$$

$$M^0 L^0 T^0 = (LT^{-1})^{a_3} (ML^{-3})^{b_3} (L)^{c_3} L$$

$$(M) \quad 0 = b_3 + 1 \qquad b_3 = -1$$

$$(T) \quad 0 = -a_3 - 2 \qquad a_3 = -2$$

$$(L) \quad 0 = a_3 - 3b_3 + c_3 - 2 \qquad c_3 = 1 \qquad \Rightarrow \Pi_3 = W_{rp} D / L v^2 \rho$$

D.- Zenbaki adimentsionalen arteko erlazioa komeni den moduan berriidatzi

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \Rightarrow \Pi_3 = g(\Pi_1, \Pi_2)$$

$$(W_{rp} D / L v^2 \rho) = g(k/D, Re)$$

$$W_{rp} = g\left(\frac{k}{D}, Re\right) \frac{L}{D} \rho v^2$$

$$\rho g H_{rp} = g\left(\frac{k}{D}, Re\right) \frac{L}{D} \rho v^2$$

$$H_{rp} = g\left(\frac{k}{D}, Re\right) \frac{L}{D} \frac{v^2}{g}$$

$$H_{rp} = f\left(\frac{k}{D}, Re\right) \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

Argi ikusten denez, azken adierazpena Darcy-Weisbach-en erlazioa da. Hala ere, analisi dimentsionalaren bitartez soluzio zehatza lortzerik ez dagoela gogoratu behar dugu.

4. taula. Uraren propietate fisikoak bar leko presiora

Temperatura	Dentsitate	Elastikotasun-modulua	Biskositatea	Bisk. zinematikoa	Gainazal-tentsioa	Lurrin-presioa
t °C	ρ kg/m ³	$K \cdot 10^{-9}$ N/m ²	$\mu \cdot 10^3$ N · s/m ²	$\nu \cdot 10^6$ m ² /s	σ N/m	p_s kPa
0	999,8	1,98	1,781	1,785	0,0756	0,61
5	1.000,0	2,05	1,518	1,519	0,0749	0,87
10	999,7	2,10	1,307	1,306	0,0742	1,23
15	999,1	2,15	1,139	1,139	0,0735	1,70
20	998,2	2,17	1,002	1,003	0,0728	2,34
25	997,0	2,22	0,890	0,893	0,0720	3,17
30	995,7	2,25	0,798	0,800	0,0712	4,24
40	992,2	2,28	0,653	0,658	0,0696	7,38
50	988,0	2,29	0,547	0,553	0,0679	12,33
60	983,2	2,28	0,466	0,474	0,0662	19,92
70	977,8	2,25	0,404	0,413	0,0644	31,16
80	971,8	2,20	0,354	0,364	0,0626	47,34
90	965,3	2,14	0,315	0,326	0,0608	70,10
100	958,4	2,07	0,282	0,294	0,0589	101,33

5. taula. Airearen propietateak altitude desberdinetara

Altuera	Temperatura	Presio absolutua	Dentsitatea	Biskositate dinamikoa	Biskositate zinematikoa
H km	t °C	p_a kPa	ρ kg/m ³	$\mu \cdot 10^5$ N · s/m ²	$\nu \cdot 10^4$ m ² /s
0	15,00	101,33	1,225	1,789	0,146
2	2,00	79,50	1,007	1,726	0,171
4	-4,49	70,12	0,909	1,661	0,183
6	-23,96	47,22	0,660	1,595	0,242
8	-36,94	35,65	0,526	1,527	0,290
10	-49,90	26,50	0,414	1,458	0,352
12	-56,50	19,40	0,312	1,422	0,456
14	-56,50	14,17	0,228	1,422	0,624
16	-56,50	10,35	0,166	1,422	0,857
18	-56,50	7,57	0,122	1,422	1,166
20	-56,50	5,53	0,089	1,422	1,598
22	-54,58	4,05	0,065	1,432	2,203
24	-52,59	2,97	0,047	1,443	3,070
26	-50,61	2,19	0,034	1,454	4,276
28	-48,62	1,62	0,025	1,465	5,860
30	-46,64	1,20	0,018	1,475	8,194

ARIKETAK

4.1.- 12 cm-ko diametroa duen hodi batetik olio 4,0 m/s-ko abiaduraz higitzen da. Zein da olioaren Reynolds-en zenbakia? (Olioaren datuak: $\rho = 0,85 \text{ g/cm}^3$, $\mu = 0,24 \text{ Pa s}$)

Emitza: 1700.

4.2.- Haize-tunel batean, hegazkin azpisoniko baten ereduaren saiakuntza egin nahi da. Hegazkin horren hegaldi-abiadurak 450 km/h-koa izan behar du eta hegaldi-altuera berriz, 4000 m-koa. Saiakuntza abiadura berdinez eta 15 °C-ko tenperaturan egiten da. $\lambda = 15$ baldin bada, zenbateko aire-presioarekin egin behar dugu saiakuntza? Zein izango da prototipoaren eta ereduaren arteko indarren erlazioa?

Emitzak: 12,13 bar; 13,93.

4.3.- Isurketako egitura hidrauliko bat eraiki behar da 450 m³/s-ko emariarentzat. Kalkulatu 12 aldiz txikiagoa den ereduaren saiakuntzan beharko den emaria.

Emitza: 0,902 m³/s.

4.4.- Ura 20 °C-tan duen ubide hidrodinamiko batean xafla lau bat 3 m/s-ko abiaduraz higitzen da. Xaflaren luzera metrokoa da, eta zabalera 0,5 m-koa. Neurtutako erresistentzia 5 N-ekoa da. Kalkulatu kideko xafla baten dimentsioak airean ($P = 1 \text{ bar}$ eta $T = 15 \text{ °C}$) 24 m/s-ko abiaduran antzekotasun dinamikoa betez higi dadin. Kalkulatu halaber aurreikusitako erresistentzia ere.

Emitzak: 1,82 m; 0,91 m; 1,3 N.

4.5.- Fluido batek ($\nu = 1,308 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), 30 cm-ko diametroa duen tutueria batean zirkulatzen du 300 l/s-ko emariarekin. Zenbateko biskositate dinamikoa izango du $\rho = 0,8 \text{ kg/l}$ duen beste fluido batek, baldin eta 60 cm-ko diametroa duen beste tutueria baten 0,4 m³/s-ko emariarekin zirkulatzen badu, antzekotasun dinamikoa izan dadin?

Emitza: 0,698 10^{-3} Ns/m^2 .

4.6.- Kanal baten alboko horma 1/25 eskalan eraiki da eta 2 m/s-ko abiaduran mantentzen da fluxua. Ereduan neurtutako indarra, 15 N-ekoa da. Kalkulatu prototipoak jasango dituen abiadura eta indarra, antzekotasun dinamikoa mantentzeko.

Emitzak: 10 m/s; 234,4 kN.

4.7.- Urpekuntzi batek 10° C-ko tenperatura duen uretan higitu behar du 5 m/s abiaduran. Kalkulatu zein abiaduran egin behar den ereduarekin saiakuntza ($\lambda = 25$) haize-tunel batean 20 °C-ko tenperaturan eta 10 bar-eko presioan ($\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$).

Emitza: 160 m/s.

4.8.- 2000 m-ko altueran 200 km/h-ko abiadura eramango duen hegazkina eraiki nahi da. Haize tunel batean 10 °C-tan egin da saiakuntza 1:25 eskalako eredu batekin eta 400 km/h-ko abiaduran. Kalkulatu tunelean izan behar den presio balioa ($\mu_e = \mu_p$).

Emaitza: 10,23 bar.

4.9.- Hegazkin baten ereduaren dimentsioak 1/25 aldiz prototipoarenak dira. Haize-tunel batean, abiadura berdinean eta tenperatura berdinean probatu nahi dugu. Zein izan behar da presioa tunelean Reynolds-en zenbakia berdina izan dadin?

Emaitza: 25 atm.

4.10.- Murgilduta dagoen gorputz bat horizontalki higitzen da olio batean zehar ($\rho = 0,85 \text{ g/cm}^3$, $\mu = 0,0041 \text{ Pa}\cdot\text{s}$), 15 m/s-ko abiaduran. Higidura horren ezaugarriak aztertzeko, 8 bider handiagoa den eredu batekin frogak egiten dira, 20 °C-tan dagoen uretan. Zein abiaduran higitu behar da eredu uretan antzekotasun dinamikoa lortzeko? Ereduaren gaineko erresistentzi indarra 12 N-ekoa dela jakinik, zein da prototipoaren gaineko indarra?

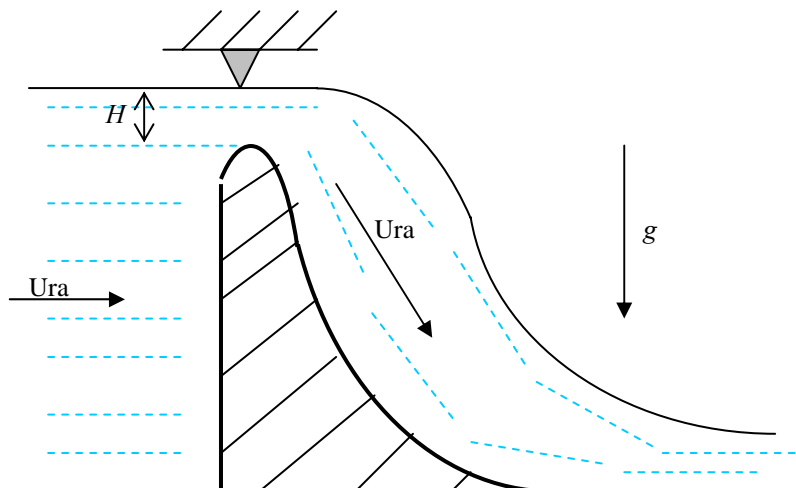
Emaitzak: 39 cm/s; 236,2 N.

4.11.- 200 m-ko luzera duen ontzi bat 18 km/h-ko abiaduran desplazatu behar da. Ontzi horren eredu batek 4 m-ko luzera du. Zein izan behar da bere abiadura, m/s-tan, Froude-ren zenbaki berdina izateko? Zein da Froude-ren zenbaki horren balioa?

Emaitzak: 0,707 m/s; 0,112938.

4.12.- Irudiko isurtegitik erortzen den ur-korrontearen emarirako adierazpen bat deduzi ezazu H eta g -ren funtzioan.

Emaitza: $Q \propto \sqrt{g} \cdot H^{5/2}$.



4.13.- Isurtegi baten eredu prototipoa baino 30 bider txikiagoa da. Ereduaren goiko aldetik ura erortzen deneko abiadura 0,4 m/s da. Zein abiaduraz eroriko da prototipoan? Ereduko gainazal jakin baten gaineko indarra 0,15 N da. Zein da horri dagokion prototipoaren gainazalaren gaineko indarra?

Emaitzak: 2,19 m/s; 4050 N.

4.14.- Tobera batetik ur-korrontea 25 m/s-tan ateratzen da bertikalki eta 30 m-ko altueraraino ailegatzen da Lurrean. Zein abiaduraz atera beharko litzateke Ilargian 40 m-ko altueraraino ailegatzeko? Ilargiko grabitatea Lurrekoaren seirena dela har ezazu.

Emaitza: 11,785 m/s.

4.15.- Ontzi baten eredua prototipoa baino 50 bider txikiagoa da. Eredua uretan 1,0 m/s-ko abiaduraz higitzen denean, sortutako olatuek eraginda 0,02 N-eko erresistentzia jasaten du. Kalkulatu prototipoak jasango duen indarra, bere abiadura eta higitzeko beharko duen potentzia, ZP-tan.

Emaitzak: 2500 N; 7,07 m/s; 24 ZP.

4.16.- Itsasoan 10 °C-ko tenperaturan eta 3 km/h-ko abiadurarekin higitzen den urpekuntzi baten saiakuntzak egin behar dira haize-tunel batean, 1:20 eskalako eredu bat erabiliz.

a) Zenbatekoa izan behar da saiakuntzaren abiadura haize-tunelean bere barnean airea 15 °C-tan eta eguratsaren presioan baldin badago.

b) Ereduren gaineko indarra 330 N-koa bada, zein izango da prototipoaren gainekoa?

Datuak: Aire (15 °C, 1 atm): $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 0,146 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

Emaitzak: 186,32 m/s; 2158 N.

4.17.- Azterketa dimentsionalaren bitartez, zulo zirkular batetik ateratzen den Q emarirako adierazpen bat deduzi ezazu, likidoaren ρ dentsitatea, zuloaren D diametroa eta ΔP presio-diferentziaren funtzioan.

Emaitza: $Kte \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} D^2$.

4.18.- Lortu korronte batean murgildutako gorputzak jasotzen duen F_D arraste indarraren adierazpena. Indarrak ρ dentsitatearen menpekotasuna duela ikusi da, baita ere μ biskositatearena, L luzera karakteristikoko batena eta V abiadurarena ere. Dentsitatearen berretzailea 1 dela ikusi da. Doitu adierazpena normalean erabiltzen den formula lortzeko.

Emaitza: $Kte \rho L^2 V^2$.

4.19.- Ura banatzeko ponpaketa-estazio baten tutueria-multzoaren karga-galera aztertu nahi da 1:5 eskalako eredu baten bidez. Esperimentuan 15 °C-tan eta 1 atm-tan dagoen airea erabiltzen da. Prototipoaren sekzioa 4 m-ko diametrokoa bada eta bertatik igarotzen den uraren, 25 °C, abiadura 500 mm/s-koa bada, kalkula ezazu:

a) Eskalako ereduan beharrezkoak diren airearen abiadura eta emaria.

b) Ereduan eta prototipoan neurturiko karga-galeren arteko erlazioa.

	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$\mu \text{ (Ns/m}^2\text{)}$
Airea (15 °C, 1 atm)	1,225	$1,789 \cdot 10^{-5}$
Ura (25 °C)	997	$0,894 \cdot 10^{-3}$

Emaitzak: 40,72 m/s; 20,47 m³/s; 8,15 (6631).

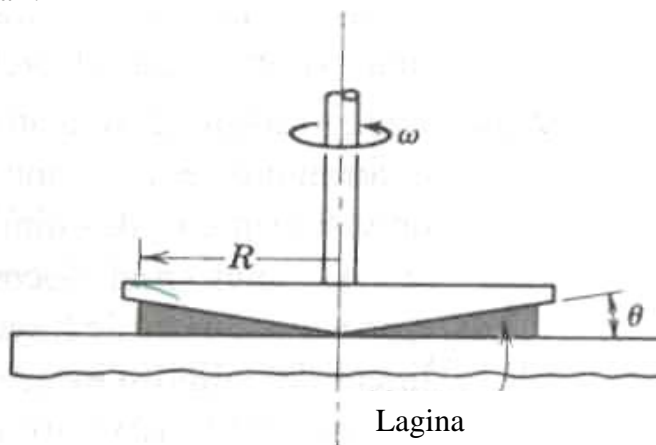
4.20.- Lekeitioko portuko ontzi batek 132 m-ko luzera du, eta bere bustitako azalera 2325 m²-koa da. 4,2 m luzerako ontzi honen eredu (modelo) bat ur gezan zehar garraiatzen da 2,5 m/s-ko abiaduraz, 17,75 N-ko erresistentzia jasotzen duelarik. Kalkula ezazu:

- Ontziaren abiadura, erabili daitekeen formula bat zehaztuz eta eginiko hipotesiak aipatuz.
- Ardatzean eragin beharreko potentzia ontzia abiadura horrekin bultzatua izan dadin itsas-urretan (1025 kg/m³), bultzadaren errendimendua %70-a dela suposatuz.

Emaitzak: 14,015 m/s; 11,31 MW.

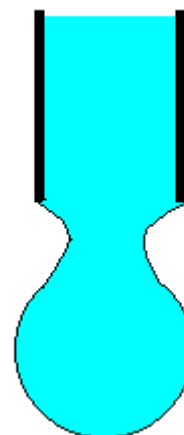
4.21.- Merkatuan dauden biskosimetroen artean, kono-plaka itxurako biskosimetroa daukagu unibertsitatean likidoen biskositatea neurtzeko. Alboko irudian ikusten denez, biskosimetroaren beheko plaka laua da. Biratzen duen konoak angelu txikia eratzen du xafla lauarekiko, bere puntu baxuenak xafla ozta-ozta ukitzen duelarik. Neurtu nahi den likidoa bi elementuen artean kokatzen da.

- Analisi adimentsionala erabiliz, erlazionatu biskosimetroan eragin beharreko M momentua, biskosimetroaren erradioa, R , ω abiadura angeluarrekin, θ angeluarekin, eta likidoaren biskositatearekin, μ .
- Kalkulatu biskosimetroaren gainean eragin beharreko M momentua, ω abiadura angeluarrez biratzeko. Honako datuak kontutan hartu: R , θ eta μ .
- θ Angelua oso txikia bada, zeintzuk dira talde adimentsionalak erlazionatzen dituzten konstanteen balioak?



Emaitzak: $M = \mu\omega R^3 g(\theta); \frac{2\pi\mu\omega R^3}{3 \tan \theta}.$

4.22.- Grabitatearen eraginez hodi bertikal batetik erortzen ari den likido-tanten masa, M , honako aldagai hauen funtzioa da: hodiaren diametroa, D , likidoaren dentsitate, ρ , likidoaren gainazal-tentsioaren koefizientea, γ , eta grabitatearen azelerazioa, g . Biskositatearen efektuak arbuiatuz, kalkulatu gainazal-tentsioaren efektua aztertzeko balagarriak diren dimentsiorik gabeko taldeak. Finkatu beraien arteko erlazioa.



Emaitza: $M = \rho D^3 f\left(\frac{\gamma}{D^2 \rho g}\right).$

4.24.- Fluxu axialeko turbina baten M momentua aldagai hauen funtzioan dago: fluidoaren dentsitatea ρ , ardatzaren diametroa D , turbinaren ardatzaren abiadura angeluarra ω eta igarotzen den fluxu bolumetrikoa Q . Idatz ezazu mendekotasun hau era adimentsionalean.

$$\mathbf{Emitza: } M = \rho \omega^2 D^5 f\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right).$$

4.25.- Propulsio helize bat birarazteko behar den potentzia ondoko parametro hauen menpean dago: D (helizearen diametroa), ρ (fluidoaren dentsitatea), c (fluxuan soinuak duen abiadura), ω (helizearen abiadura angeluarra), v (fluxuaren abiadura askea) eta μ (fluidoaren biskositatea). Analisi dimentsionalaren bitartez, zenbat talde adimentsional azaltzen zaizkigu problema honetan? Zein da talde adimentsional hauen arteko erlazioa?

$$\mathbf{Emitza: } \dot{W} = \rho D^2 v^3 \Phi(Re, Ma, \frac{\omega D}{v}).$$

