

2. HIDRODINAMIKA

- 2.1. Hidrodinamikako zenbait kontzeptu garrantzitsu
 - 2.1.1. Fluidoaren garraioa
 - 2.1.2. Fluxua
 - 2.1.3. Lerroak eta hodiak
 - 2.2. Jarraitasunaren ekuazioa
 - 2.3. Momentuaren ekuazioa
 - 2.4. Bernouilli-ren ekuazioa
 - 2.4.1. Dedukzioa
 - 2.4.2. Aplikazioak
 - 2.4.3. Bestelako terminoak
 - 2.5. Magnus efektua
- Ariketak



Ur-erlojuak

Hidrodinamikak higitzen ari diren fluidoak aztertzen ditu. Mekanikaren atalen artean konplexuenetarikoa da. Higitzen diren partikula-sistemek Newton-en legeak bete behar dituzte. Newton-en legeetatik datozkigun ekuazioek partikula guztien higidura zehaztuko digute. Beraz, printzipioz, partikula guztien higidura azter genezake. Hala ere, ageri den ekuazio-kopurua oso handia da, eta horregatik, beraien ebazpena oso zaila da (ad. eguraldiaren iragarpena).

Beste aldetik, Hidrodinamikan fluidoaren konprimagarritasuna eta biskositatea kontutan hartu behar dira. Aurreko gaien esan genuenez, gasak konprima daitezkeen bitartean, likidoak ia konprimaezinak dira. Hidrodinamikaren barruan *Aerodinamika* deituriko atala dago, eta bertan gasen konportamoldea aztertzen da. Hala ere, Aerodinamikaren azterketa kurtso honen helburuetatik kanpo geratzen da. Gainera, biskositateak fluidoetan sortzen dituen efektuak hurrengo gaien aztertuko ditugu. Hortaz, Hidrodinamikako gai honetan *fluido idealen (edo perfektuen)*

higidura baino ez dugu aztertuko. Fluido ideal edo perfektuak konprimaezinak eta biskositaterik gabekoak dira.

Edozein arazo hidrodinamikoa aztertu behar denean, hiru era desberdinetan joka dezakegu:

- 1.- Kontrol-bolumenaren bidez edo analisi integrala.
- 2.- Partikula-fluidoaren bidez edo analisi diferentziala.
- 3.- Azterketa esperimentalaren bidez edo dimentsio-analisia.

Kasu guztietan, fluidoak mekanikaren hiru kontserbazio legeak bete behar ditu, eta horretaz gain, termodinamikako egoera ekuazio bat ere bete behar du. Azkenik, fluidoak sistemaren hasierako baldintzak eta muga-baldintzak ere bete behar ditu. Laburbilduz, fluidoak ondoko baldintzak bete behar izango ditu:

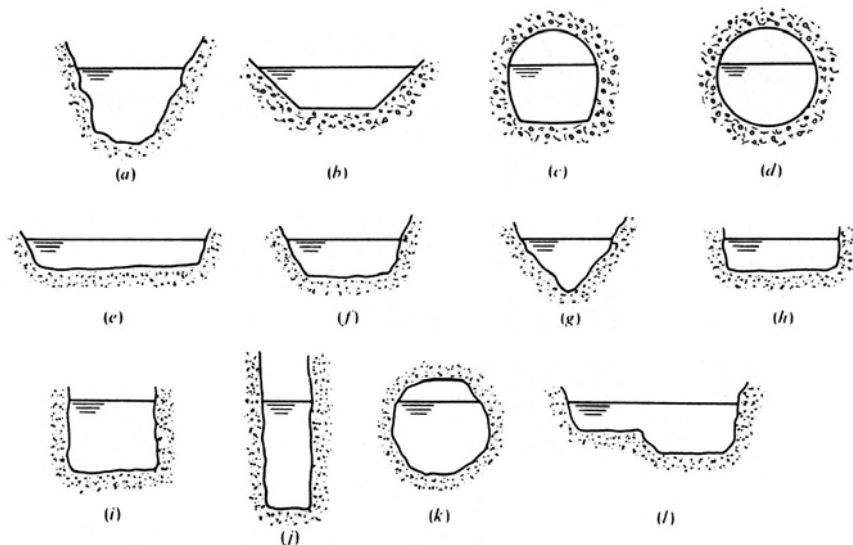
- 1.- Masaren kontserbazioa (Jarraitasunaren ekuazioa).
- 2.- Energiaren kontserbazioa (Termodinamikaren lehenengo printzipioa).
- 3.- Momentu linealaren kontserbazioa (Newton-en bigarren legea).
- 4.- Termodinamikaren egoera ekuazioa.
- 5.- Gainazal solidoen gainean, faseartekoetan, eta abarretan hasierako baldintzak eta muga baldintzak.

Kurtso honen helburua ez da fluidoaren jokoera termodinamikoa aztertzea, eta horregatik, ikuspegi termodinamikoa alde batean utziko dugu.

2.1. Hidrodinamikako zenbait kontzeptu garrantzitsu

Hidrodinamikan murgildu baino lehenago, bertan askotan erabiltzen diren kontzeptu batzuk argitzen ahaleginduko gara.

2.1.1. Fluidoaren garraioa



Fluidoaren garraiorako mekanismoak bi motatakoak izan daitezke. Alde batetik, mekanismo *irekiak* dauzkagu (adibidez, ubideak eta ibaiak). Hauek gainazal librean egurats-presioan daukate eta likidoak garraiatzeko baino ez dute balio. Beste aldetik, mekanismo *itxiak* edo *behartuak* dauzkagu (adibidez, hodiak). Hauen kasuan fluidoaren fluxuak mekanismo osoa betetzen du, eta likidoen zein gasen garraiorako baliagarriak dira.

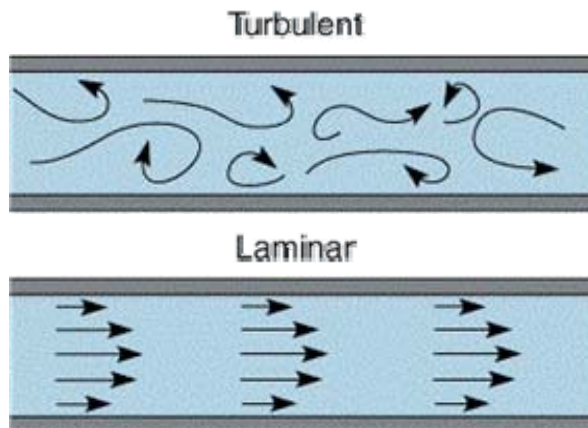
Ubidearen generatritzetik plano perpendikularrean likidoaren gainazal askeak, ubidearen alboko hormek eta hondoak mugatzen duten sekzio perpendikularri *sekzio bustia* deritzo. Azalera honek mugatzen duen perimetroari *perimetro bustia* deritzo. Sekzio bustia zati perimetro bustia eginez, *erradio hidraulikoa* lortzen da.

2.1.2. Fluxua

Fluidoaren Estatikatik Dinamikara pasatzeko, fluidoaren higiduren sailkapen bat egingo dugu lehenik eta behin. Orohar, fluidoak higitzen ari denean, fluidoaren korrontea edo *fluxua* dagoela esaten da, nahiz eta fluxu hitza sekzio batean zehar denbora-unitatean pasatzen den fluido-kantitatea adierazteko ere erabili. Fluxu motak sailkatzeko irizpide desberdinak daude. Garrantzitsuenak ondoko hauek dira:

- Partikulen ibilbideak kontutan hartuta:

- a) *Fluxu laminarra*: Fluidoaren partikulak laminetan bezala higitzen dira. Laminak albokoekin labainduz desplazatu egiten dira. Alboko irudian, fluxu laminarrean higitzen den fluido baten abiaduren banaketa ageri da.
- b) *Fluxu turbulentoa edo zurrunbilotsua*: Fluidoaren partikulek ibilbide korapilotsuak egiten dituzte. Egoera honetan biskositatearen eragina oso garrantzitsua da.



- Biskositatea eta konprimagarritasunaren arabera:

- a) *Fluxu ideala edo perfektua*: Fluido konprima ezina denean eta biskositatearen efektuak arbuia daitezkeenean.
- b) *Fluxu erreala*: Fluido konprimagarria denean edo bere biskositatea kontutan hartu behar denean.

- Temperatura eta beroarekiko jokaeraren arabera:

- a) *Fluxu isoterma*: Fluxuan fluidoaren tenperatura konstante mantentzen da. Tenperatura konstante mantentzeko, fluidoan bero-transferentzia egon behar da.
- b) *Fluxu adiabatikoa*: Fluidotik ez da berorik ateratzen, ezta barrura sartzen ere. Beraz, presioa edo bolumena aldatzen badira, tenperatura ere aldatu behar da.

- Denborarekiko aldakuntza kontutan edukiz:

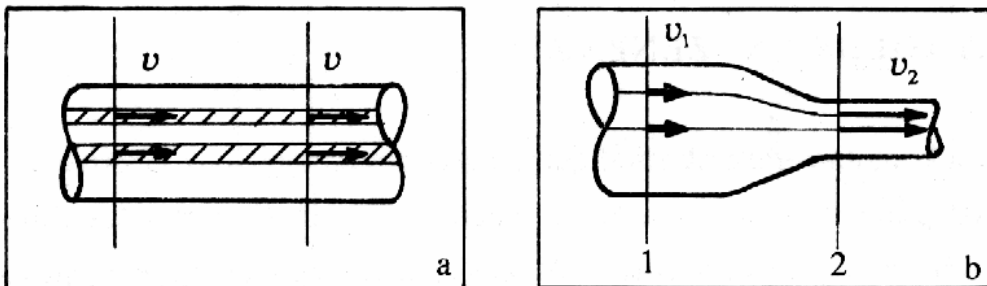
- a) *Fluxu iraunkorra*: Espazioko puntu guztietan fluidoaren ezaugarriak eta higidura ere denborarekin aldatzen ez direnean gertatzen da. Honek ez du esan nahi puntu guztietan

ezaugarriek eta higidura berdina izan behar direnik. Beraz, fluidoaren ezaugarriek honako funtzio bat bete behar dute: $f = f(x, y, z)$. Hau guztia matematikoki honela adierazten da:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

b) *Fluxu ez-iraunkorra*: Espazioko puntu guztietan fluidoaren ezaugarriak eta higidura denborarekin aldatzen direnean gertatzen da.

- **Espazioarekiko aldakuntzaren arabera:**



a) *Fluxu uniforme*: Espazioko puntu guztietan fluidoaren abiadura berdina denean (ikus *a* irudia). Hau matematikoki era honetan adierazten da:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$$

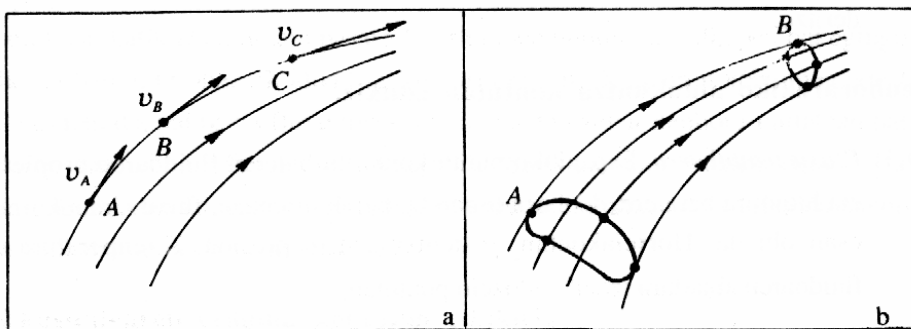
b) *Fluxu ez-uniforme*: Fluidoaren abiadurak balio desberdinak hartzen ditu espazioko puntu desberdinetan. Honek ez du esan nahi fluxu iraunkorra ezin daitekeen izan. (ikus *b* irudia)

2.1.3. Lerroak eta hodiak

Higitzen ari den fluido batean ageri diren zenbait ibilbide edo lerro definituko dugu jarraian:

- *Korrente-lerroak*: Fluidoaren abiadura lerro hauen puntu guztietan ukitzailea da (ikus *a* irudia).

- *Korrente-hodia*: Fluido barruan gainazal bat hartzen badugu, bere mugetatik pasatzen diren korrente-lerro guztiek sortzen duten hodiari deritzo (ikus *b* irudia).



- *Fluxu-lerroa*: Fluidoaren partikula batek jarraitzen duen ibilbidea da. Fluxu iraunkorren puntu batetik pasatzen diren partikula guztiek fluxu-lerro berdina dute, hau da, ibilbide berdina daukate.

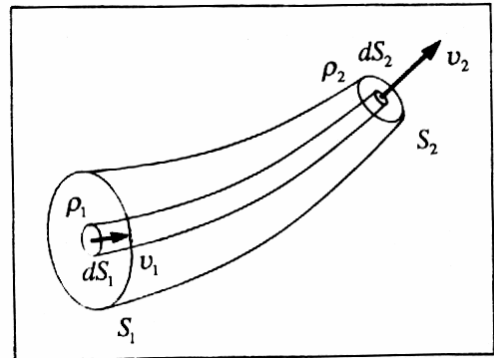
- *Fluxu-hodia*: Fluido barruan gainazal bat hartzen badugu, bere mugetatik pasatzen diren fluxu-lerro guztiek sortzen duten hodiari deritzo. Hodi honen alboko hormetatik ez dago inolako fluxurik. Gainera, fluxu iraunkorren korrante-hodia finko mantentzen da.

Fluidoaren fluxua iraunkorra bada, korrante-lerroak eta fluxu-lerroak bat datoz, eta korrante-hodiak eta fluxu-hodiak baita ere.

2.2. Jarraitasunaren ekuazioa

Esan bezala, erregimen laminar iraunkorren dauden fluido idealak aztertuko ditugu orain. Jo dezagun korrante-hodi baten ebakidura normal bi hartzen ditugula, S_1 eta S_2 alegia (kalkuluak errazteko hartzen ditugu sekzio normalak). Korrante-hodiaren alboko azaleratik ez dago inolako fluxurik. Beraz, mutur-batetik sartzen den fluido guztia derrigorrez beste muturretik irten behar da.

Demagun irudian agertzen den korrante-hodiaren S_1 azaleratik sartzen den denbora-unitateko fluidoaren masa dm_1 dela, eta S_2 azaleratik irteten dena dm_2 . Orduan, matematikoki era honetan adieraziko ditugu biak:



$$\begin{aligned} dm_1 &= \rho_1 v_1 S_1 dt, \\ dm_2 &= \rho_2 v_2 S_2 dt, \end{aligned}$$

non v_1 eta v_2 , S_1 eta S_2 azalerei dagozkien fluidoaren batezbesteko abiadurak diren. Hodiaren barruko masak konstante irauten badu, bi masa elementu hauek berdinak izan behar dute:

$$dm_1 = dm_2,$$

eta dagozkien balioak ordezkatzuz, ondoko hau lortuko dugu:

$$\rho_1 v_1 S_1 dt = \rho_2 v_2 S_2 dt.$$

$dt \neq 0$ da, beraz, dt desagerraraziko dugu:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.$$

Adierazpen honi *fluidoaren jarraitasun-ekuazioa* deritzo, eta fluxu idealean zein errealean erabilgarria da. Fluido konprima ezina bada, bere dentsitatea konstantea izango da. Suposizio hau eginez ($\rho_1 \approx \rho_2$), jarraitasun-ekuazioa honela geratuko da:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Beste aldetik, fluido baten *emari bolumetrikoa*, Q , honela definitzen da:

$$Q = vS .$$

Nazioarteko Unitate Sisteman emari bolumetrikoaren unitatea m^3/s da. Emari bolumetrikoa sekzio bat denbora unitatean iragaten duen fluido-bolumena da, eta fluxuaren kantitatea neurtzeko erabiltzen da. Hala ere, edozein gainazalaren kasuan emariaren balioa lortzeko, $v \, dS$ biderkadura eskalarra gainazalean integratuz lortzen da:

$$Q = \int v \, dS .$$

Jarraitasun-ekuazioa emariaren funtzioan honela adierazten da:

$$Q_1 = Q_2 \quad (\text{Beraz: } Q = kte) .$$

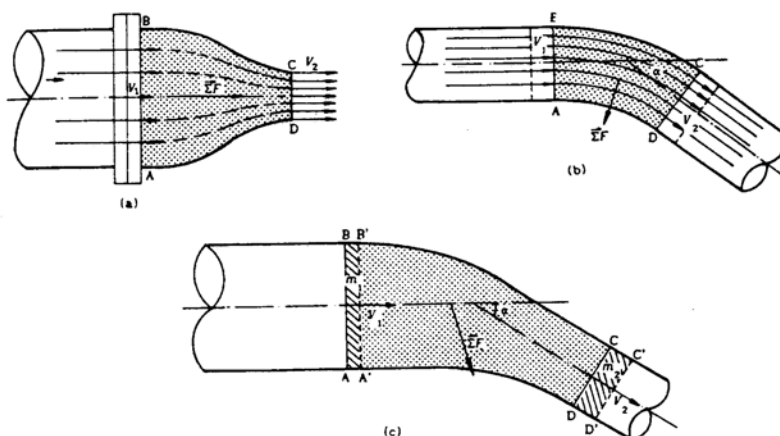
Emari bolumetrikoaz gain, *emari masikoa*, \dot{m} , ere definitu egiten da:

$$\dot{m} = \rho Q .$$

Emari masikoak denbora unitatean sekzio batetik igarotzen duen fluido-masa adierazten du, eta bere unitatea kg/s .

2.3. Momentuaren ekuazioa

Hidrodinamikan momentu linealaren ekuazioa ere erabiltzen da, eta zenbait fenomeno aztertzeko funtsezko da (*ariete-kolpea* adibidez). Momentuaren ekuazioa idazteko kontrol-bolumen bat hartuko dugu. Orduan, kontrol-bolumenean zehar fluxuaren abiadura aldatzen bada, bertako masan eragiten duten indarren batura ez da zero izango. Fluxuaren abiadura hiru eratarata alda daiteke: magnitudez (a irudia), norabidez (b irudia) edo aldi berean magnitudez eta norabidez (c irudia).



Momentuaren ekuazioa lortzeko, Newton-en bigarren legea erabiliko dugu:

$$d\vec{p} = \sum \vec{F}_i dt .$$

Horrela, indar-erresultante horrek dt denbora infinitesimal batean zehar sortutako bulkada mekanikoa fluxuaren momentu linealaren aldaketa infinitesimala eragiten du. Momentuaren aldaketa hori kalkulatzeko dt denbora batean kontrol-bolumenetik irteten eta sartzen den likidoaren momentu lineala konparatuko dugu:

$$d\vec{p} = d\vec{p}_{irten} - d\vec{p}_{sartu} = dm_2 \vec{v}_2 - dm_1 \vec{v}_1 .$$

Baina erregimen iraunkorrean kontrol-bolumenean sartzen den masa eta irteten dena berdina izan behar dira, eta jarraitasun-ekuazioa erabiliz,

$$dm_1 = dm_2 = \dot{m} dt ,$$

non \dot{m} fluxuaren emari masikoa den. Ondorioz,

$$d\vec{p} = dm_2 \vec{v}_2 - dm_1 \vec{v}_1 = \dot{m} dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \sum \vec{F}_i dt .$$

Ekuazioa sinplifikatuz, ondoko adierazpena lor daiteke:

$$\sum \vec{F}_i = \dot{m} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) .$$

Kontrol-bolumenean eragiten den indar erresultantea kalkulatzeko adierazpena lortu dugu, *momentuaren ekuazioa* alegia. Sarrera eta irteera bana izan beharrean gehiago baditugu, adierazpena honela geratuko zaigu:

$$\sum \vec{F}_i = (\dot{m}_a \vec{v}_a + \dot{m}_b \vec{v}_b + \dots)_{irteera} - (\dot{m}_A \vec{v}_A + \dot{m}_B \vec{v}_B + \dots)_{sarrera} .$$

Ekuazio hauek fluxu mota guztietan aplika daitezke, hau da, fluxu biskosoan ere baliagarriak dira.

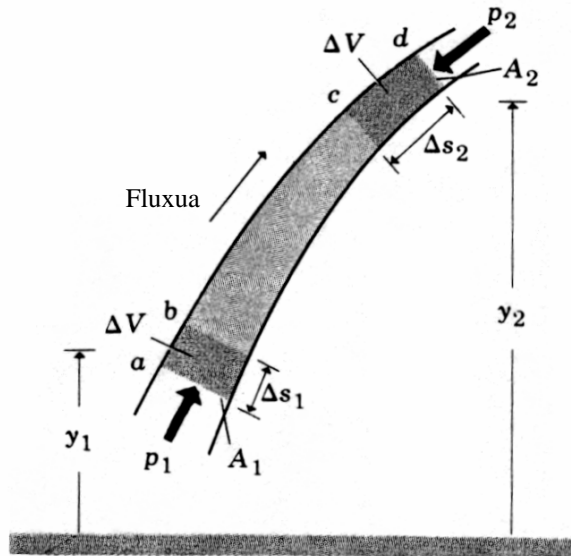
2.4. Bernouilli-ren ekuazioa

Ikusi dugunez, fluido konprimaezinaren abiadura aldatzen da sekzio aldakorreko hodi batean zehar higitzean. Abiadura aldatzeko, fluidoaren gainean azelerazio batek eragin behar du. Beraz, indar batek lana egin behar izango du, eta ondorioz, fluidoaren energia zinetikoa aldatuko da. Indar hori eragiteko, hodiaren bi muturretan presio-aldaketa egon behar da; hau da, hodiaren sekzioa aldatzean presioa ere aldatu egingo da. Gainera, hodiaren muturren artean altuera ere alda daiteke, energia potentzial grabitatorioa aldatuz. Horrela, hodiaren muturren arteko presio-aldaketek orokorrean bi sorburuak izango dituzte: abiadura-aldaketa eta altuera-aldaketa.

Bernouilli-ren ekuazioaren bidez, hodi bateko edozein punturen presioa, altuera eta abiadura erlazionatuko ditugu. Azken finean, Bernouilli-ren ekuazioak higitzen ari den edozein fluido idealaren energiaren kontserbazioa adierazten du.

2.4.1. Dedukzioa

Daniel Bernouilli-k (1700-1782), zientzialari suitzarrak, 1738. urtean frogatu zuen hemen lortuko dugun erlazioa. Bernouilli-ren ekuazioaren frogapena egiteko, fluxu laminarra eta iraunkorra kontsideratuko dugu, bertatik higitzen den fluidoa ideala izango delarik.



Demagun ondoko irudian ageri den fluxu-hodia daukagula. Fluxu-hodiaren a eta c puntuen artean dagoen fluido-zatia hartuko dugu, eta lana-energiaren teorema aplikatuko diogu. Teorema honek ondoko hau baieztatzen du: gorputz baten ganean egiten den lanak, W , gorputzaren energia zinetikoa, T , eta potentziala, U , aldatzen ditu. Eta matematikoki honela adierazten da:

$$W = \Delta T + \Delta U .$$

Δt denbora-tartea pasa ondoren, fluido-zatia b eta d sekzioen artean egongo da. Lehenengo sekzioan fluidoa Δs_1 distantzia higitu da eta bigarrean Δs_2 distantzia. Jarratasun ekuazioa betetzeko, Δt denbora-tartean igaro den fluido-bolumenak berdina izan behar du sekzio bietan, eta ΔV ikurraz adieraziko dugu:

$$\Delta V = A_1 \Delta s_1 = A_2 \Delta s_2 .$$

Bi sekzioetan presioak eragingo du, eta desplazamendua gertatzean lana burutuko du. Bi sekzioetan egiten den lana kontuan hartzen badugu, lan guztia hauxe izango da:

$$W = P_1 A_1 \Delta s_1 - P_2 A_2 \Delta s_2 = (P_1 - P_2) \Delta V ,$$

non P_1 eta P_2 , A_1 eta A_2 sekzioetan eragiten diren presioak diren. Bestalde, fluido-zatiaren energi potentzialaren aldaketa era honetan adieraziko dugu:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \rho \Delta V g (y_2 - y_1) ,$$

non y_1 eta y_2 altuerak diren. Fluido-zatiaren energi zinetikoaren aldaketa ondoko hau da:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) ,$$

non v_1 eta v_2 , A_1 eta A_2 sekzioetako fluidoaren batezbesteko abiadurak diren.

Lortu ditugun emaitzak lana-energiaren teoreman ordezkatzuz:

$$(P_1 - P_2)\Delta V = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2) + \rho\Delta Vg(y_2 - y_1).$$

Azken adierazpen honetan $\Delta V \neq 0$ denez, ekuaziotik ken dezakegu, hau da:

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1).$$

Ekuazioa berrantolatuz, *Bernouilli-ren ekuazioa* deiturikoa lortuko dugu:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2.$$

Beraz, fluidoaren edozein puntutan hiru termino hauen batuketa konstante mantenduko da:

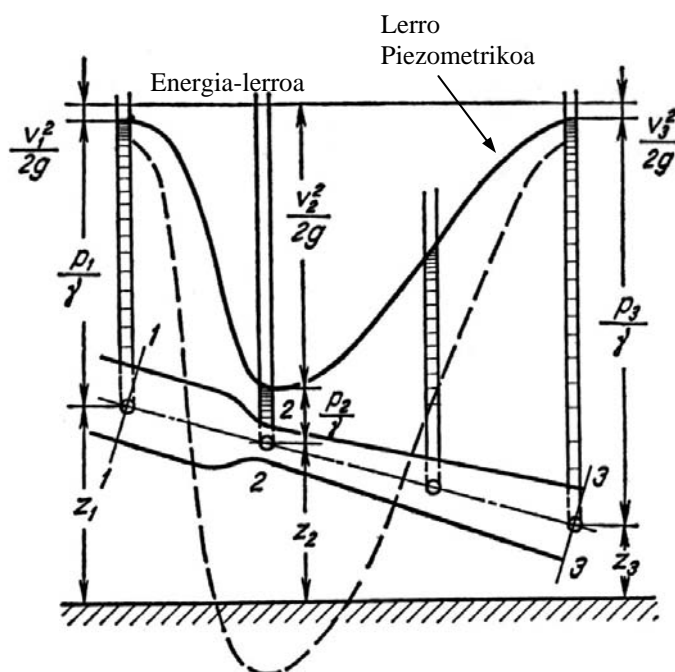
$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = kte.$$

Ekuazio honetan Nazioarteko Unitate Sistema erabili behar da. Hortaz, presioa pascaletan adierazi behar da, altuera metrotan, abiadura m/s -tan eta dentsitatea Kg/m^3 -tan. Gainera, adierazpen honetan $v = 0$ eginez gero, hidrostatikako emaitzak lortzen ditugu.

Bernouilli-ren ekuazioa modu desberdinetan adieraz daiteke. Adibidez, aurretik lortu dugun adierazpena ρg faktorez zatitzen badugu, era honetan geratuko da:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} + h = kte.$$

Ekuazio honen gai bakoitzak altuera bat adierazten du, guztiek luzerako unitateak baitauzkate. h terminoak *altuera geometrikoa* adierazten du. Bigarren batugaia, $v^2/2g$ alegia, *altuera zinetikoa* da. Honek jausi askean v abiadura hartzeko, likidoak eduki behar duen altuera adierazten du. Azkenik, $P/\rho g$ batugaia *presio-altuera* deitu ohi zaio, eta $P/\rho g + h$ batuketari *altuera piezometrikoa*. Altuera piezometrikoak P presioaren bidez likidoak hodi batean lortuko lukeen altuera adierazten du. Altuera honen neurketa egiteko *hodi piezometrikoak* deitzen diren hodi finak erabiltzen dira. Beheko irudian ikusten den moduan, hodi piezometrikoen altuerak

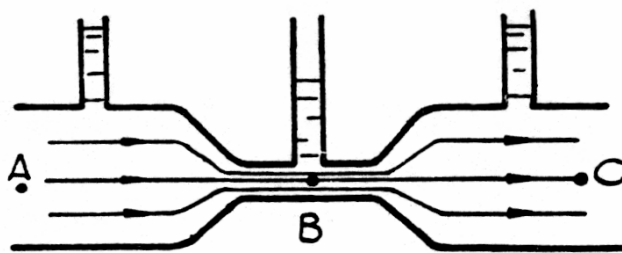


batzen dituen lerroa marraz daiteke, *lerro piezometrikoa* alegia. Hortaz, Bernouilli-ren ekuazioa beste era honetan ere aurkez dezakegu: erregimen laminar eta iraunkorrean higitzen den fluido idealerako, hiru altueren batura konstante mantentzen da. Hiru altuerak batuz lortzen den altueraren zuzenari *energia-lerroa* deritzo.

2.4.2. Aplikazioak

Errealitatean aztertu behar diren kasu askotarako Bernouilli-ren ekuazioa oso erabilgarria suertatzen da. Jarraian ageri diren kasuak adibide argienak dira.

a) Venturi efektua



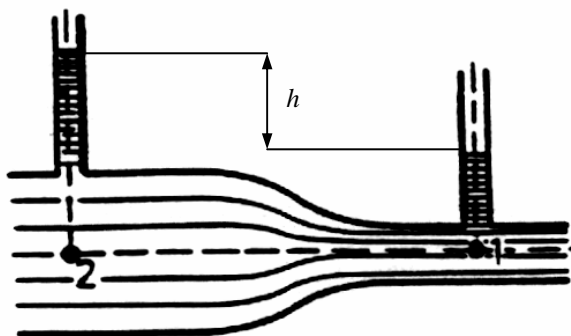
Hemen ikusiko dugun efektuak Giovanni Battista Venturi-ren (1746-1822), fisikari italiarraren, izena darama. Demagun irudian ageri den hodia dugula, eta A eta B puntuetako abiadurak eta sekzio elkartzutak v_A , v_B , S_A eta S_B direla. Bi puntuen altuera geometrikoak berdina direla kontuan hartuz, marraztutako korrante-lerroarako Bernouilli-ren ekuazioa aplikatuko dugu:

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g}.$$

Bi puntuen artean jarraitasunaren ekuazioak bi puntuen abiadurak erlazionatzen ditu:

$$Q = S_A v_A = S_B v_B.$$

Hortik, A puntuko abiadura B-rena baino txikiagoa dela ondorioztatzen da. Abiaduren arteko erlazio hau Bernouilliren ekuazioan ordezkatzean, A puntuko presioa B-rena baino handiagoa dela ikusten dugu. Presio-diferentzia hau *Venturi efektu* izenez ezagutzen da, eta ikusi ahal izateko bi puntu horietan sekzio txikia duten bi hodi piezometrikoak ezarri behar dira. Azaldu dugunaren arabera, 1 puntuko hodian fluidoak altuera txikiagoa hartuko du, 2 puntukoan baino.



Efektu honetaz baliatuta, *venturimetroa* deituriko neurketa-tresna eraiki daiteke. Venturimetroa hodi batetik igarotzen den emaria neurtzeko tresna da. Horretarako, hodian estugune txiki bat

egiten da hodi piezometriko bat ezarriz. (Estugunea ezin da bat-batean gertatu, progresiboki gertatu behar da. Bestela, hodian turbulentiak agertuko dira, eta fluxu iraunkorra eta laminarra desagertuko da). Hodiaren beste puntu batean beste hodi piezometriko bat jartzen da. Bi puntuen artean jarraitasunaren ekuazioa eta Bernouilliren ekuazioa aplikatzen badira, ondoko adierazpena lor daiteke:

$$\frac{Q^2}{2S_A^2} + \frac{P_A}{\rho} = \frac{Q^2}{2S_B^2} + \frac{P_B}{\rho}.$$

Aurreko ekuaziotik emaria askatuz, hauxe lortzen da:

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(S_2^2 - S_1^2)}}.$$

Goiko irudiko geometriatik $P_2 - P_1 = \rho gh$ dela kontuan hartuta, emariaren adierazpenean ordezkaturiko dugu:

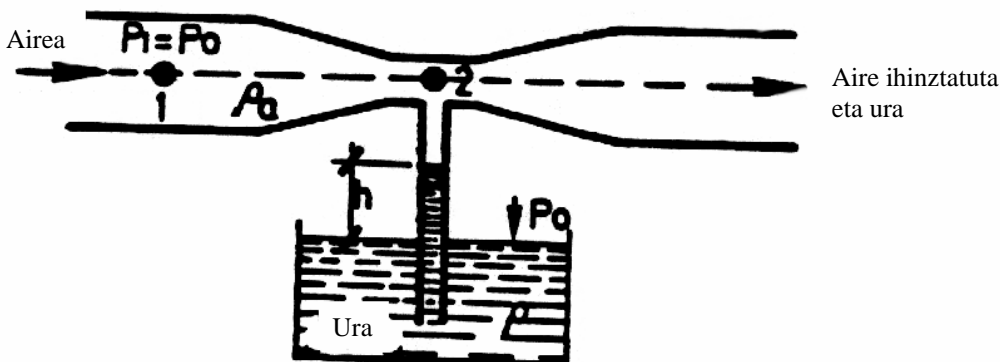
$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\rho gh}{\rho(S_2^2 - S_1^2)}} = K \sqrt{h},$$

non K konstantea venturimetroko konstantea den. Konstante hau venturimetro bakoitzaren ezaugarria da, eta bere adierazpena ondoko hau da:

$$K = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g}{(S_2^2 - S_1^2)}}.$$

b) Ihinztagailua

Irudian agertzen den sistema ihinztagailua da. Ikus dezagun zertan datzan.



Bernouilli-ren ekuazioa 1 eta 2 puntuetan aplikatuz, honako hau lortzen da:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}.$$

Hortik, P_2 presioa aska dezakegu:

$$P_2 = P_1 - \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Bertan jarraitasun-ekuazioa ($v_1 S_1 = v_2 S_2$) erabiliz:

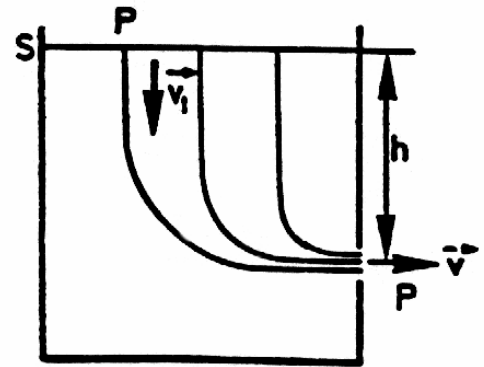
$$P_2 = P_1 - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2.$$

Airea sartzen deneko abiadura gehituz doan neurrian, 2 puntuko presioa txikiagotuz doa eta ura hodi bertikalean igo egiten da. Ura hodi horizontalerara heltzen denean, aire-korronteak herrestan eramana da, ihinzatua irteten delarik.

Hemen aipatu dugun adibidean ura eta airearen papera trukutzen badugu, *ponpa zurgatzailea* izango dugu. Bertan, ura hodi horizontaletik pasatuko da, eta emari batetik aurrera airea uraren fluxuan sartu egingo da. Horrela, ontzi itxi bat lotzen badugu, ontzian presio manometriko negatiboa lortuko dugu.

d) Torricelli-ren teorema

Evangelista Torricelli-k (1608-1647), zientzialari italiarrak, ondoko teorema frogatu zuen. Likidoa duen ontzi ireki bati zulo bat egiten badiogu, zulo horretatik likidoa aterako da. Bernouilli-ren ekuazioa zulo txikia eta gainazal askeari aplikatuz, Torricelli-ren teorema lortuko dugu. Horren bidez, likidoaren irteerako abiadura kalkulatu ahal izango dugu. Likidoaren irteerako abiadura v bada, g grabitatearen azelerazioa eta h zuloaren eta likidoaren gainazal askearen arteko distantzia, abiaduraren balioa honako hau da:



$$v = \sqrt{2gh}$$

Dakusagun emaitza hau nola lor daitekeen. Irudian agertzen den sistamarako Bernouilli-ren ekuazioa bi puntuen artean aplikatuko dugu. Puntu horiek, gainazal askea eta zuloa izango dira:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh + \frac{P_{at}}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{P_{at}}{\rho}.$$

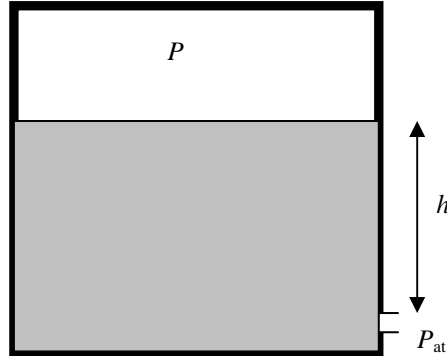
Bi puntuetan presioa berdina denez, egurats-presioa alegia, ekuaziotik kendu ahal izango dugu:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh = \frac{v^2}{2}.$$

Bestalde, gainazal askearen azalera, S , zuloarena, s , baino askoz handiagoa bada, jarraitasun-ekuaziotik ondokoa ondoriozta daiteke:

$$v = \frac{S}{s} v_1 \quad \Rightarrow \quad v \gg v_1$$

Hau erabiliz, aurreko emaitza lortzen da: $v = \sqrt{2gh}$



Demagun aztertzen ari garen ontzia itxita dagoela, eta barruan P presioa konstante mantentzen dela. Bertan, berriro Bernouilli-ren ekuazioa aplikatuko dugu gainazal askeko edozein puntu eta zuloaren artean,

$$\frac{v_0^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{P_{at}}{\rho}.$$

non v_0 eta v gainazal askeko eta zuloatik ateratzen den fluidoaren abiadurak diren. Bertatik, irteerako abiadura askatuz:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh + \frac{2(P - P_{at})}{\rho}.$$

Normalean $v \gg v_0$ dela beteko da, eta orduan adierazpen hau izango dugu:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{2(P - P_{at})}{\rho}}.$$

Ekuazio hau aztertzen badugu, $2gh$ terminoa bi kasu berezietan arbuia daiteke. Haietariko bat, barruko presioa altua denean gertatzen da. Orduan, $2(P - P_{at})/\rho$ terminoa bestea baino handiagoa da, eta ondorioz irteerako abiadura honako hau izango da:

$$v \approx \sqrt{\frac{2(P - P_{at})}{\rho}}.$$

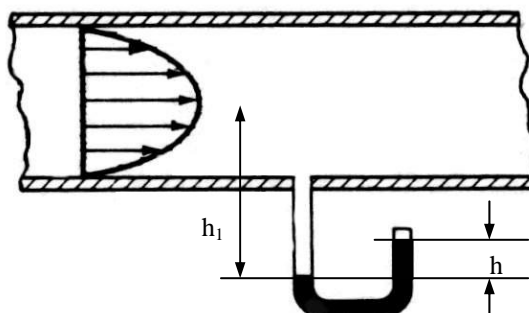
Barruko fluidoa gasa denean, hurbilketa berdina egin daiteke. Gasen dentsitatea oso txikia denez, $2(P - P_{at})/\rho$ terminoa bestea baino handiagoa izango da. Hortaz, kasu honetan ere irteerako abiadura goiko adierazpenetik aterako dugu. Hala ere, adierazpen hau erabili ahal izateko gasen presioa txikia izan behar da. Bestela, gasen konprimagarritasuna kontuan hartu behar izango genuke, eta orduan, ez litzateke fluido ideala izango.



d) Higitzen ari den fluidoaren magnitudeen neurketa

Fluidoaren egoera zehazteko magnitude batzuetaz baliatu behar gara, garrantzitsuenak hauek direlarik: abiadura, presioa, tenperatura, dentsitatea,... Horregatik, fluidoa zein egoeratan dagoen jakiteko, magnitude hauek ondo zehaztu behar izango ditugu. Jarraian, fluidoaren ezaugarriak neurtzeko normalean erabiltzen diren zenbait tresna azalduko dugu.

- Tutu irekiko manometroa



Manometro honek hodi piezometrikoaren funtzio berdina dauka, hau da, garraiatzen ari den fluidoaren presio hidrostatikoa neurtzea. Berez U formako hodi bat da, eta hodiaren mutur bat fluxua garraiatzen ari den tutuarekin konektaturik dago, bestea eguratsarekin kontaktuan dagoelarik. Hodiaren barruan, normalean fluido astun bat dago, merkurioa adibidez. Erabiltzen den hodiaren diametroa tutuarenarekiko alderatuta txikia izan behar da. Horrela, hodiaren eraginez tutuaren fluxua ez da aldatuko era nabarmenean. Bestela, fluxu zurrunbilotsua sortu ahal da. Gainera, horrelako tresnak erabili ahal izateko, tutuaren barruko horman ez dira zimurtasunak egon behar, bestela neurketa ez da zehatza izango.

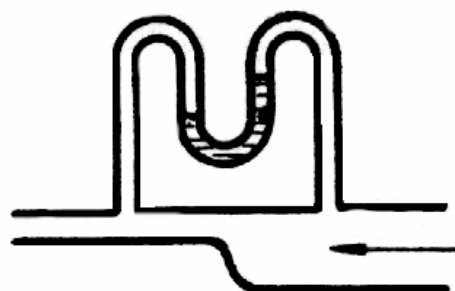
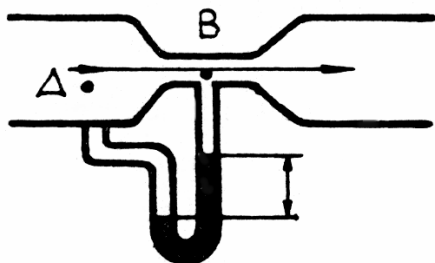
Aurreko irudian ageri den manometrorako presio hidrostatikoa adierazpen honen bidez kalkula daiteke:

$$P = \rho_m gh - \rho gh_1,$$

non ρ_m eta ρ , merkurioaren eta garraiatzen den fluidoaren dentsitateak diren. h eta h_1 neur daitezken bi altuerak dira. Hortaz, bi neurri hartuta fluidoaren presio manometrikoa neur daiteke. Gainera, kasu askotan bigarren terminoa arbuia garria izaten da, eta horietan ez da erabiltzen.

- Manometro diferentziala

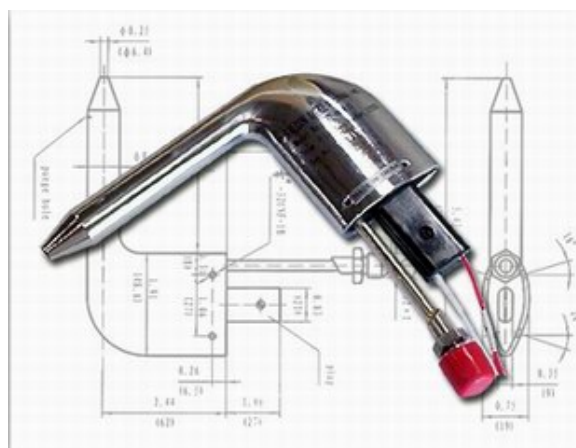
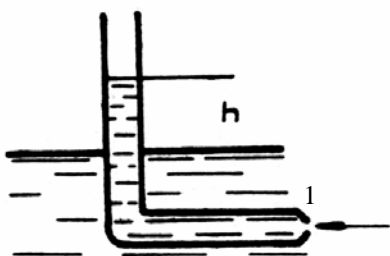
Manometro diferentzialaren bidez bi puntuen arteko presio-diferentzia neurtu ahal izango dugu. Funtsean hodi fin bat da, eta fluxua garraiatzen duen tutuaren bi puntuetan konektaturik dago. Barruan normalean merkurioa izaten du. Alboko irudietan bi manometro diferentzialak ikus daitezke. Hala ere, hauek bi adibide konkretuak dira, manometroaren geometria beste edozein ere izan daiteke.



Lehenengo irudian ageri den geometriarako presio-diferentzia formula honen bidez kalkulatu ahal izango dugu:

$$\Delta P = P_A - P_B = (\rho_m - \rho)gh.$$

- Pitot-en hodia



Pitot-en hodia zunda txiki bat da, eta fluxuaren puntu batean dagoen presiozko altueraren eta energia zinetikoari dagokion altueraren batura neurtzen du. Fluxuan sartzen da, eta korrontearen kontra jarri behar da. Goiko bi irudietan ikus daitezke zelan erabiltzen den.

Ezkerreko irudian 1 eta 2 puntuen artean Bernouilli-ren ekuazioa aplikatzen badugu:

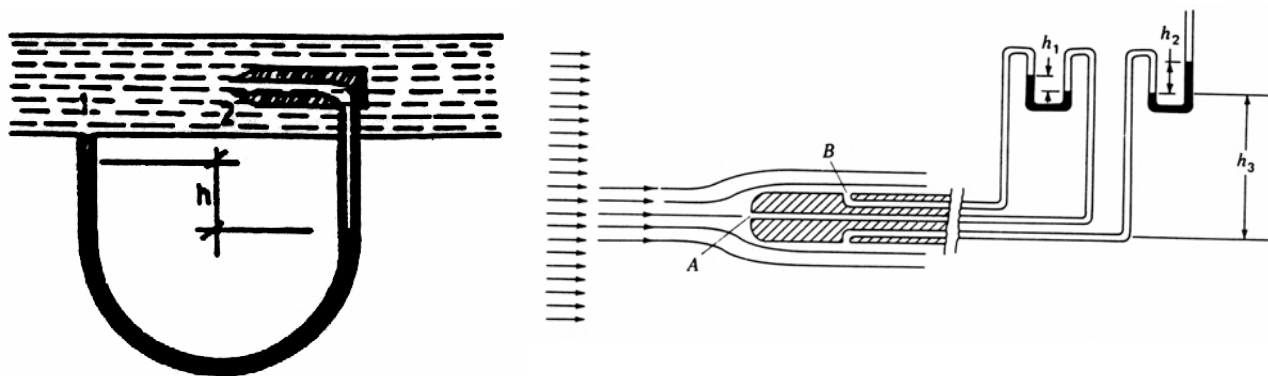
$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Bertan, $P_1 = \rho gh$ da, beraz:

$$h = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Ura h altuerara iritsi ondoren, 1 puntutik Pitot-en hodira sartzen ahalegintzen diren partikulak geratuta gelditzen dira, eta beraien energia zinetikoa presio-energia bihurtzen dute.

- Prandtl-en hodia (batzutan Pitot-en hodia ere deitua)



Tresna honek fluidoaren abiadura neurtzeko balio du. Horretarako, hodiak fluxua garraiatzen duen tutuaren bi puntutan konektaturik dago. Hegazkinetan askotan erabiltzen da airearekiko abiadura neurtzeko. Ezkerreko irudiko hodirako ondoko erlazioa dugu:

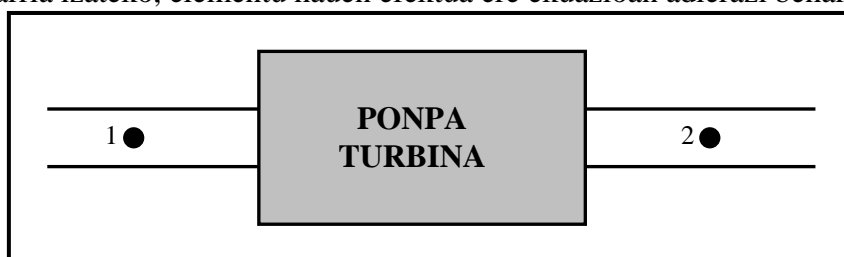
$$v_1 = \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right)}$$

2.4.3. Bestelako terminoak

Aurretik aurkeztu ditugun ekuazioak benetan erabilgarriak izateko, errealitatean gertatzen diren fenomeno guztiak azaldu behar dituzte. Hortaz, fenomeno batzuk formalismo matematikoan kontuan hartu ahal izateko, ekuazioetan termino berriak sartu behar izango ditugu. Jarraian bi motatako terminoak aztertuko ditugu.

a) Ponpak eta turbinak

Bernouilli-ren ekuazioa frogatu egin dugu, eta zenbait kasu praktikoetan erabili ere. Baina, hodi-sistemetan sarritan, gehienetan ez esatearren, hodiez gain bestelako elementuak izaten ditugu. Elementu horien artean bi dira garrantzitsuenak: *ponpa* eta *turbina*. Hortaz, Bernouilli-ren ekuazioa benetan erabilgarria izateko, elementu hauen efektua ere ekuazioan adierazi behar izango dugu.



Demagun ponpa bat (turbina bat) hodi-sistema batean integraturik dugula. Ponpak (turbinak) fluidoari energia emango (kenduko) dio. Dakigunez, Bernouilli-ren ekuazioak fluidoaren energiaren kontserbazioa adierazten du. Horregatik, fluidoari energia ematen (kentzen) badiogu, derrigorrez ekuazioan termino berri bat jarri behar izango dugu. Gehitu beharreko terminoak honela adieraziko ditugu:

$$\text{Ponpa} \quad P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 - W$$

$$\text{Turbina} \quad P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 + W .$$

Adierazpenotan W terminoak fluidoko bolumen unitateari ematen (kentzen) zaion energia adierazten du.

b) Torricelli-ren teoremaren zuzenketak

Torricelli-ren teoreman oinarritutako esperimentu bat burutzen badugu, fluidoaren irteera-abiadura bere balio teorikoa baino txikiagoa dela konturatu gara. Arrazoia biskositatean datza. Praktikan ikusten denez, bi balio horiek koefiziente baten bidez erlaziona ditzakegu, hau da:

$$C_v = \frac{v_{\text{erreala}}}{v_{\text{teorikoa}}},$$

non C_v *abiadura-koefizientea* den eta bere balioa $C_v < 1$ den. C_v parametro enpiriko eta adimentsionala da, beraz, bere balioa neurketen bidez lortuko dugu. Hala ere, zulo eta egitura ohikoenetarako C_v koefizienteak tauletan aurki daitezke.

Beste aldetik, fluxu batean bat-bateko estugune batetik pasatzerakoan fluxu-hodia uzurtu egiten da. Baina uzkurdurak estugunea pasatuta ere jarraitzen du. Horrela, fluxu-hodiaren sekzio normalak txikituz joango dira, gero berriro handitzen hasteko. Sekzioen azalera erlazionatzen dituen koefizienteari *uzkurdura-koefiziente* deritzen. S zuloaren azalera eta S_c uzkurtutako azalera badira, uzkurdura-koefizientea matematikoki honela adieraziko da:

$$C_c = \frac{S_c}{S},$$

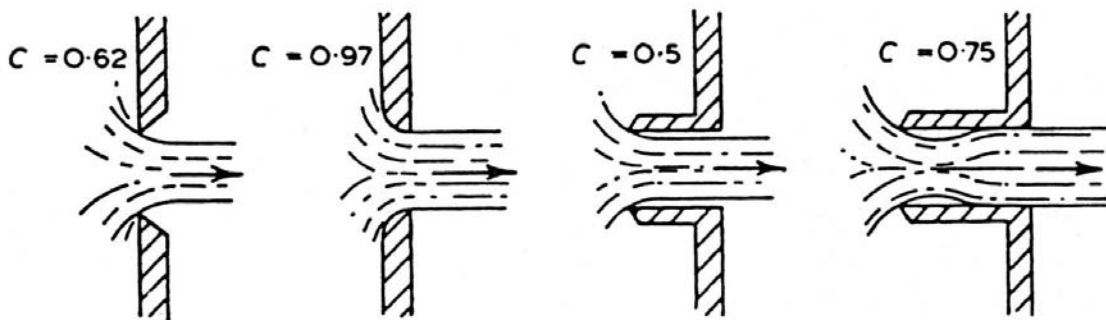
non $C_c < 1$ den. Kasu desberdinetarako C_c -ren balioak tauletan ere aurki daitezke.

Hau guztiaren ondorioz, emarian ere aldaketa agertu egiten da. Eta emari teoriko eta errealaren arteko diferentzia ondoko koefizientearen bidez azalduko dugu.

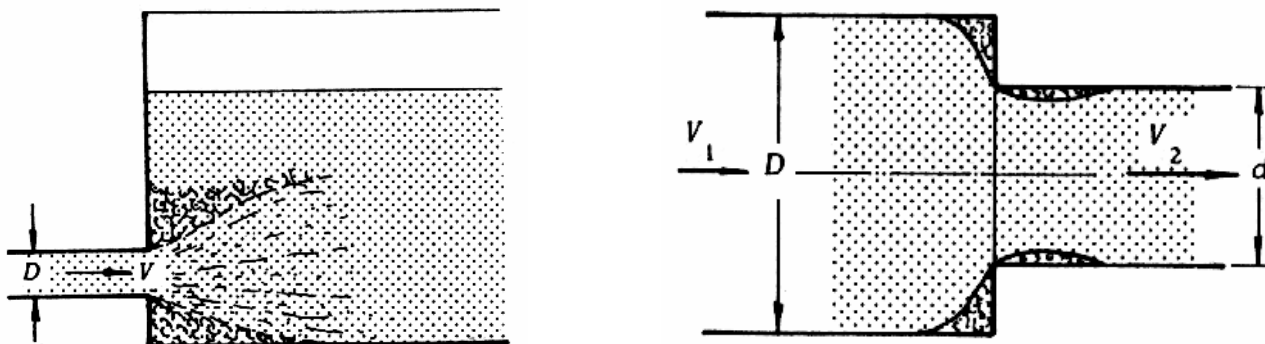
$$Q_{\text{erreala}} = C Q_{\text{teorikoa}},$$

non $C = C_c C_v$ den. Emarian agertzen zaigun koefiziente honi *deskarga-koefiziente* deritzen, eta hau ere bat baino txikiagoa da.

Demagun horma mehe bat dugula eta bertan sekzio zirkularreko zulo bat egiten dugula. C -ren balioa zuloaren eitearen arabera ere aldatuko da (jarraian adibide batzuk ageri dira).

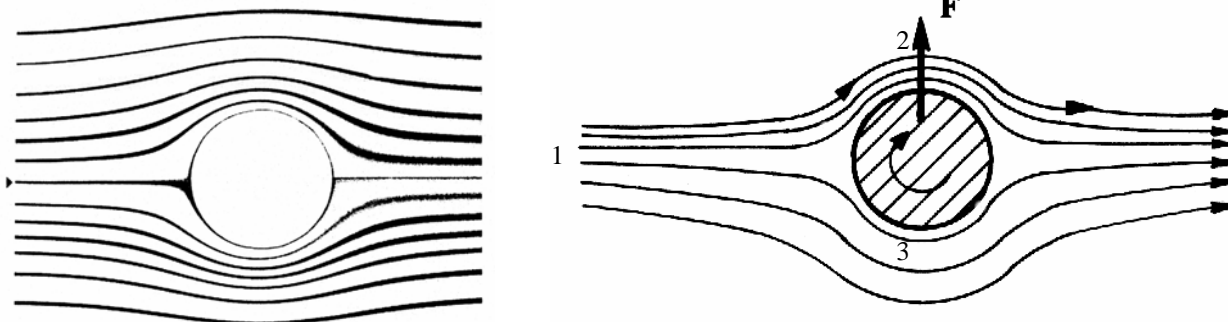


Baina hiru koefiziente hauek Torricelli-ren aplikazioetaz gain bestelako sistemetan ere erabil daitezke (ikus alboko irudiak).



2.5. Magnus efektua

Erregimen laminarrean higitzen ari den fluido batean, bere ardatza higidurarekiko elkarzuta duen zilindro bat ezartzen badugu, korrante lerroak bere inguruan uniformeki banatuko dira (ikus ezkerreko irudia).



Demagun orain, zilindroa bere ardatzarekiko biratzen hasten dela, eskuineko irudian adierazten den bezala. Zilindroaren gainazalak, biskositatearen eraginez, inguruko fluido geruzei abiadura transmititu egiten die, eta horrela, korrante-lerroak deformatu egiten dira. Irudiko 1 eta 2 puntuen artean, eta 1 eta 3 puntuen artean Bernouilli-ren ekuazioa aplikatzen badugu, bi ekuazio hauek lortuko ditugu:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

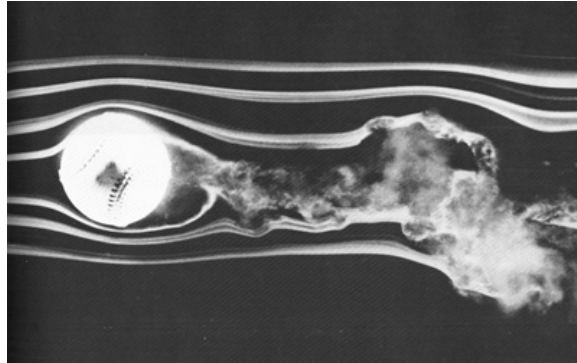
$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g y_3$$

Bi adierazpenak berdinduz eta terminoak berrantolatuz, hauxe lortzen da:

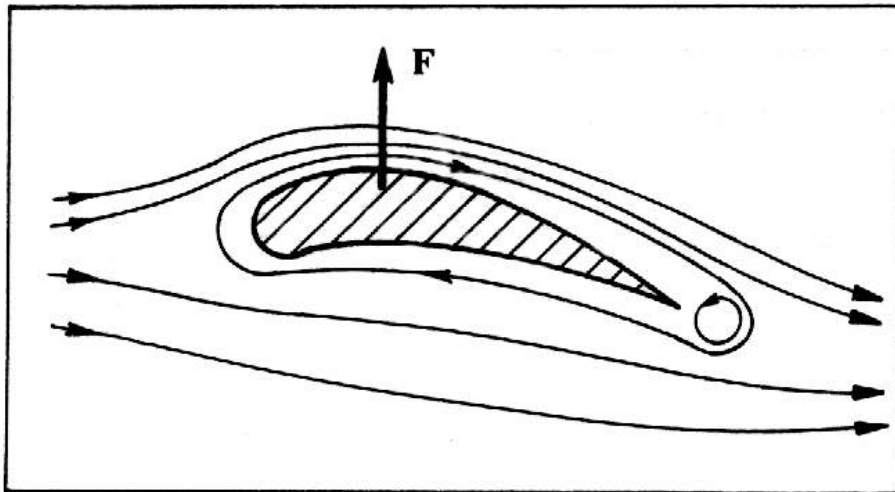
$$P_3 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_3^2) + \rho g (h_2 - h_3)$$

Irudian ikus daitekeenez, $h_2 - h_3 > 0$ da. Beste aldetik, zilindroaren biraketaren ondorioz, 2 puntuko abiadura 3 puntukoa baino handiagoa izango da, hau da, $v_2^2 - v_3^2 > 0$. Hortaz, goiko adierazpenetik $P_3 > P_2$ dela ondorioztatzen da. Beraz, presio-diferentziagatik goranzko F indar bat agertuko da, zilindroa gorantz eramatera joko duena

Adibide modura, golfean erabiltzen diren pilotak dauzkagu. Pilota horiek dituzten zulotxoaren zeregina marruskadura handiagotzea da. Horrela, pilota era desberdinetan biratzen, airean deskribatzen dituen ibilbideak ere desberdinak izango dira. Jarraian, beisboleko pilota bat biratzen ikus dezakegu.



Hegazkin baten hegoetan antzeko fenomenoak gertatzen dira. Fluidoaren korrante-lerroen desbiderapenaren kausaz, hegoaren goiko eta beheko aldeetan artean presio-diferentzia azaltzen da. Hori dela eta, hegoaren gainean goranzko indar bat sortzen da. Indar honi *bultzada aerodinamiko* edo *sustentazioa* deritzen.



ARIKETAK

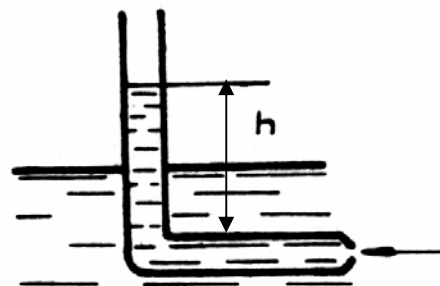
2.1.- 6 cm-ko diametroko hodi horizontal batean, 2 cm-ko diametroko estugune bat dago. Manometro diferentzial batean merkurioaren maila-diferentzia $h = 3$ cm-koa da. Kalkulatu hoditik igarotzen den ur-emaria.

Emaitza: $8,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

2.2.- $2,5 \text{ cm}^2$ -ko sekzioa duen hodi horizontal batean, 1 cm^2 -ko sekzioko estugune bat dago. Ur-emaria $9 \text{ l}/\text{min}$ -koa denean, zein da manometro diferentzialaren merkurioko maila-diferentzia?

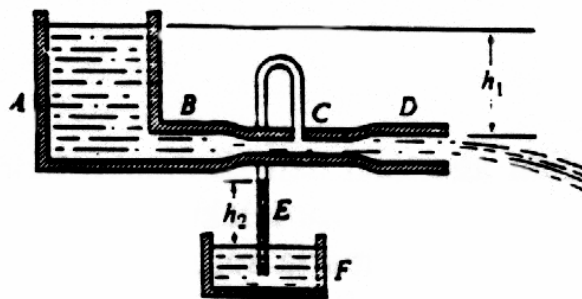
Emaitza: 7,7 mm Hg.

2.3.- Ibai baten uraren abiadura neurtzeko, angelu zuzen baten itxurako hodia uretan sartzen da. Hodiaren muturretan bi zulo daude, bat txikia eta beste bat handia. Zulo txikia uretan sartzen da, hodiaren beste adarra bertikalki geratzen delarik. Ura 10 cm igotzen da hodian (ikus alboko irudia). Kalkulatu ibaiaren uraren abiadura.



Emaitza: 1,4 m/s.

2.4.- Oso handiak diren bi ontzi irekiak dauzkagu, A eta F, alegia, (ikus ondoko irudia). Ontziek likido berdina daukate, fluido idealtzat hartuko dugularik. Demagun fluxu laminarra dagoela, eta C sekzioa D sekzioaren erdia dela. Zein izango da E tutuan likidoak lortuko duen h_2 altuera h_1 -en funtzioan?



Emaitza: $h_2 = 3 h_1$.

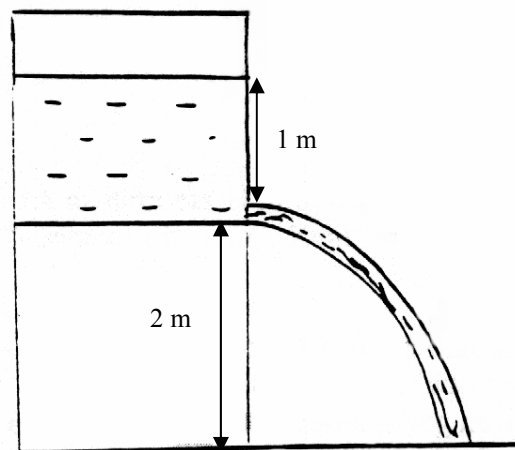
2.5.- Hodi horizontal batean, ur-fluxua 50 cm^2 -ko estugune batetik pasatu eta gero, 200 cm^2 -ko sekzioa duen zulo batetik atmosferara botatzen da. Estugunetik hodi bertikala ateratzen da, eta gainazal askea atmosferako presiopean duen ontzi batean sartzen da. Ontzia hodiaren azpian kokatuta dago. Emaria $20 \text{ l}/\text{s}$ -koa bada, zein izan behar da estugune eta ontziaren gainazal askearen arteko altuera-diferentziarik handiena, korrontek ontziaren ura zurga dezan?

Emaitza: 76,5 cm.

2.6.- 2 cm-ko diametroko hodiari diafragma bat jartzen zaio. Diafragma horren erdian 4 mm-ko diametroa duen zulo bat dago, eta hortik urezko 6 litro pasatu egiten dira minutuko. Hodiaren barneko presio kalkulatu nahi da. Uzkuadura-koefizientea 0,65 bada, kalkulatu hodiaren gainpresioa urezko cm-tan.

Emaitza: 764,169 cm H₂O.

2.7.- Horma bertikaletako ontzi itxi batean uraren maila metro batekoa da. Uraren gainazal askearen gainean dagoen txokoa $8 \cdot 10^5$ Pa-ko presio manometrikoan dago. Ontzia lurraren gainetik bi metrotara dagoen xafla baten gainean dago. Hondoaren mailan 1 cm^2 -ko sekzioko zulo bat egiten da ontziaren horma batean.



- Zulotik ateratzen den txorroak non ukituko du lurra?
- Zein da txorroak lurraren gainean eragiten duen indar bertikala?
- Zein da ontziaren gainean eragiten den indar horizontala?

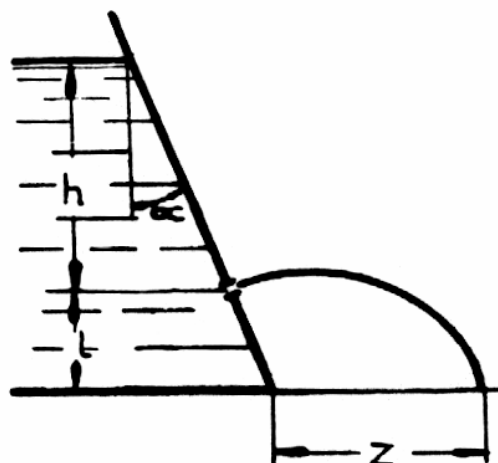
Suposatu ontziaren barruan uraren maila eta presioa konstante mantentzen direla, eta fluidoa ideala dela.

Emaitzak: 25,7 m; 25,19 / 50,38 N; 160 N.

2.8.- Ontzi itxi batean ura eta airea dago. Airearen presio manometrikoa 4 atmosferakoa da. Uraren gainazalaren azpitik metro batera zulo bat egiten da. Lortu uraren irteera-abiadura.

Emaitza: 28,8 m/s.

2.9.- Ur-ontzi handi batean, horma batek bertikalarekiko 30° -ko inklinazioa dauka (ikus alboko irudia). Horma horretan 2 cm^2 -ko sekzioko zulo bat dago. Zuloa ontziaren hondotik $0,2 \text{ m}$ -ko distantziara dago bertikalki, eta gainazal asketik metro batetara. Zulotik txorro bat ateratzen da, eta honek hondoaren plano hormaren oinarritik $z = 1,85 \text{ m}$ -tara mozten du. Puntu horretan, 18 l -ko ontzi bat 31 s -tan betetzen da. Kalkulatu abiadura, uzkuradura eta deskargaren koefizienteak.



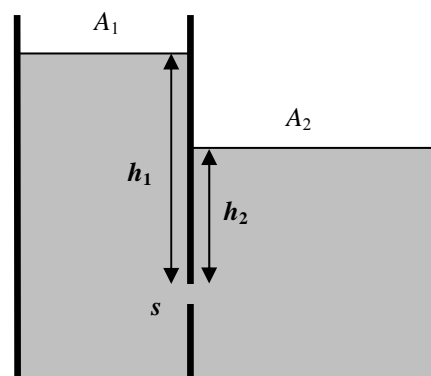
Emaitzak: 0,98; 0,67; 0,66.

2.10.- Ondoko irudiko ontziaren erdiko horman egindako zulotik likidoa pasatzen da alde batetik bestera. Ontzia oso handia dela suposatuz, frogatu zulotik pasatzen den likidoaren igarotze-abiadura honako hau dela:

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

Kalkulatu bi altuerak berdintzeko behar den denbora.

Emaitza: $t = \frac{A_1 A_2}{(A_1 + A_2) s} \sqrt{\frac{2(h_1 - h_2)}{g}}$.



2.11.- 40000 l-ko ontzi batek horma bertikalak ditu, beraien altuera 4 m delarik. Ontziak 10 cm-ko diametroko zulo bat dauka bere hondoan. Demagun ontzia urez beterik dagoela, kalkulatu ondoko datuak:

- Lehenengo 20000 l ateratzeko behar den denbora.
- Gainontzekoak ateratzeko behar den denbora.

Emaitzak: 5 min 37 s; 13 min 33 s.

2.12.- Horma bertikal eta meheak dituen ontzi zilindriko batek horma batean zulo txiki bat dauka. Zulotxoaren sekzioa ontziaren sekzioa baino mila aldiz txikiagoa da. Zulotxoaren duen plano horizontala, beste plano horizontal batetik 25 cm altuagoa dago. Zulotxotik ateratzen den txorroak beheko plano hori bertikaletik metro batetara ukitzen du. Kalkulatu ondoko datuak:

- Gainazal askearen h altuera zuloaren gainean.
- Erorketaren distantzia horizontala erdira pasatzeko behar den denbora.

Emaitzak: 1 m; 3 min 46 s.

2.13.- Kalkulatu ur-jauzi baten potentzia, baldin eta bere altuera-diferentzia 6 m-koa eta bere emaria $3 \text{ m}^3/\text{s}$ -koa badira.

Emaitza: 240 ZP.

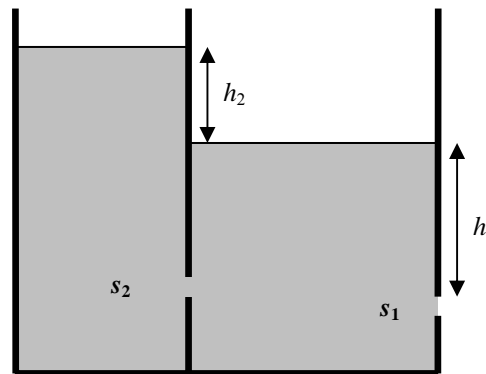
2.14.- Ur-ontzi batean dagoen zulo baten sekzioa $a = 50 \text{ cm}^2$ -koa da, eta zuloa $h = 1,5 \text{ m}$ -ko sakoneran dago gainazaletik. Uzkuerdura-koefizientea 0,8 bada, kalkulatu emari erreala.

Emaitza: 21,6 l/s.

2.15.- Alboan dauden bi ontziak nahiko handiak dira eta komunikaturik daude. Ontziek bi zulo dauzkate, s_1 eta s_2 , eta beraietatik likidoa igarotzen da (ikus alboko irudia). Lortu ondoko emaitzak:

- h_1 eta h_2 -ren artean egon behar den erlazioa fluxu iraunkorra sortzean.
- h_1 -ren balioa.
- s_1 eta s_2 zuloen irteera-abiadurak, v_1 eta v_2 alegia.

Datuak: $s_1 = 2 \text{ cm}^2$; $s_2 = 4 \text{ cm}^2$; $h_2 = 2 \text{ m}$.



Emaitzak: $\frac{1}{4}$, 8 m; 12,52 m/s; 6,26 m/s.

2.16.- Eraikin baten sutea itzaltzeko ponpa bat erabiltzen da. Ponpak inguruan dagoen laku handi batetik hartzen du ura. Eraikinaren goiko aldearen altuera lakutik hartuta 20 m-koa da, eta hara igo behar dira urezko $5 \text{ m}^3/\text{min}$, 10 m/s abiadurarekin. Zein potentzia izan behar du ponparen motorrak?

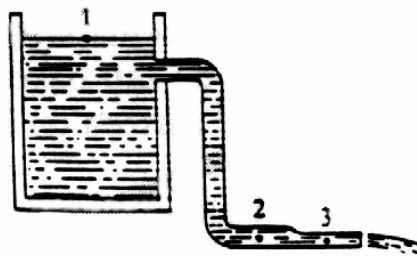
Emaitza: 27,9 ZP.

2.17.- Hegazkin baten hegoaren goiko aldetik 40 m/s-ko abiadura duen aire-korrente bat pasatzen da, eta behekotik 30 m/s-ko abiadura duen beste bat. Hegoaren masa 300 kg bada, eta

bere azalera 5 m^2 -koa, zein da goranzko indarra? Eta masa berdinarekin bere azalera 10 m^2 -koa bada? (Datua: $\rho_{\text{airea}} = 1,3 \text{ kg/m}^3$)

Emaitzak: 2275 N; 4550 N.

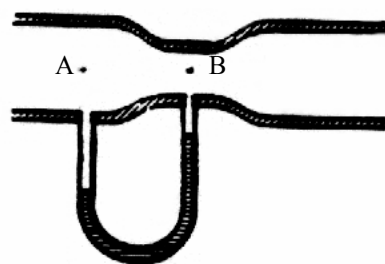
2.18.- Irudian dagoen gordelektik ura etengabeki irteten da. 1 puntuaren altuera konstantea 10 m -koa da, eta 2 eta 3 puntuena 1 m -koa. $A_2 = 0,04 \text{ m}^2$ eta $A_3 = 0,02 \text{ m}^2$ badira, kalkulatu 2 puntuaren presio manometrikoa eta emaria.



Emaitzak: $66,13 \cdot 10^3 \text{ Pa}$; $0,2656 \text{ m}^3/\text{s}$.

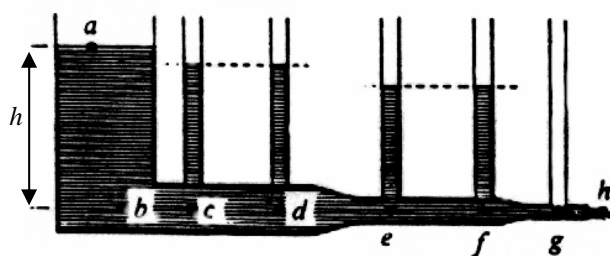
2.19.- Irudian agertzen den hodiaren azalera 40 cm^2 -koa da alde zabaletan eta 10 cm^2 -koa alde estuetan. Ur-emaria $3000 \text{ cm}^3/\text{s}$ bada, kalkula ezazu:

- a) Alde zabaletako eta alde estuko abiadurak
- b) Bi alde hauen arteko presio-diferentzia
- c) Merkuriozko zutabeen arteko altuera-diferentzia



Emaitzak: $0,75 \text{ m/s}$; 3 m/s ; $4218,74 \text{ Pa}$; $3,4 \text{ cm}$.

2.20.- Irudian agertzen den gordelekuak azalera handi bat dauka eta bere sakonera, h , 40 cm -koa da. Hodiaren zati desberdinetako azalera 1 cm^2 , $0,5 \text{ cm}^2$ eta $0,2 \text{ cm}^2$ -koak dira. Likidoa ideal da. Kalkulatu emaria, zati bakoitzeko abiadura eta hodi bakoitzean likidoak hartzen duen altuera.



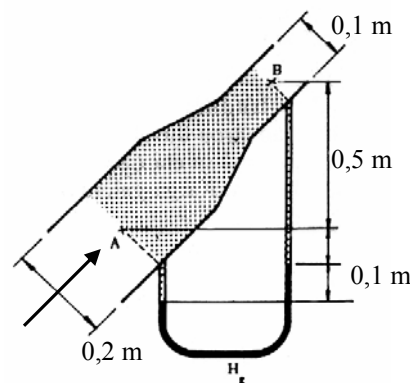
Emaitzak: $5,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$; $0,56 \text{ m/s}$; $1,12 \text{ m/s}$; $2,8 \text{ m/s}$; $38,4 \text{ cm}$; $33,6 \text{ cm}$; 0 cm .

2.21.- A azalera eta H altuerako zilindro bati s azalera zulo txiki bat egiten zaio bere beheko oinarrian. Zilindroa likidoz guztiz beterik dago, eta zabalik dago eguratsaren presiopean. Zenbat denbora igaroko da hutsik geratu arte?

Emaitza:
$$t = \frac{A}{s} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

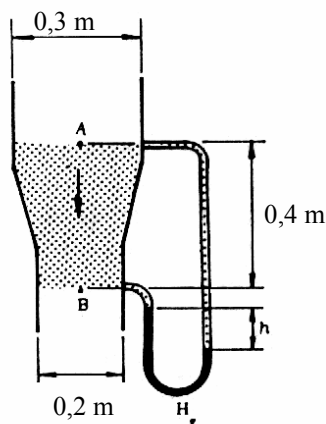
2.22.- Kalkulatu alboko irudiko tututik igarotzen den ur-emaria, baldin eta A eta B puntuen arteko karga-galera arbuigarrria dela kontsideratzen bada.

Emaitza: $40,3 \text{ l/s}$.

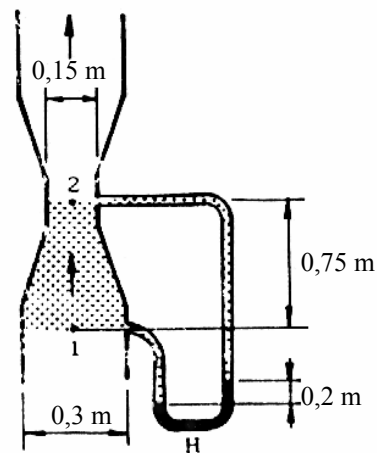


2.23.- Beheko irudiko tututik 120 l/s-ko ur-emia pasatzen da. Kalkulatu manometro diferentzialak emango duen neurketa.

Emaitza: 4,74 cm.



2.23. Ariketako irudia.

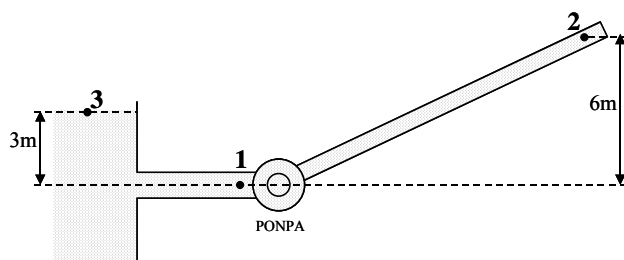


2.24. Ariketako irudia.

2.24.- Kalkulatu goiko irudiko tutuan izango den ur-emia, 1 eta 2 puntuen arteko karga-galerak alde batera utzita.

Emaitza: 0,128 m³/s.

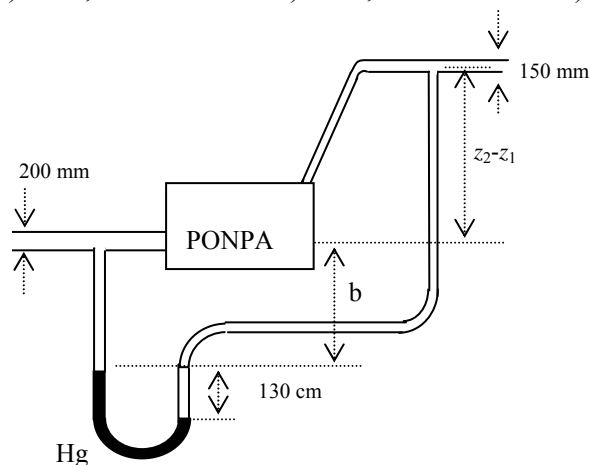
2.25.- Alboko irudiko instalazioan, kalkulatu 1 eta 2 puntuetako presioak tutueriako karga-galerak alde batera utziz eta ondorengo datuak kontuan hartuta: $Q = 30 \text{ l/s}$; $Pot_{teorikoa} = 22 \text{ kW}$; $\eta = 0,75$; $D_1 = 0,25 \text{ m}$ eta $D_2 = 0,20 \text{ m}$.



Emaitzak: 0,292 bar; 5,201 bar.

2.26.- Beheko irudiko ponpak 100 l/s-ko ur-emia ematen du. Zein da ponparen potentzia? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

- a) $\approx 17,15 \text{ kW}$ b) $\approx 14,68 \text{ kW}$ c) $\approx 16,38 \text{ kW}$ d) $\approx 15,91 \text{ kW}$

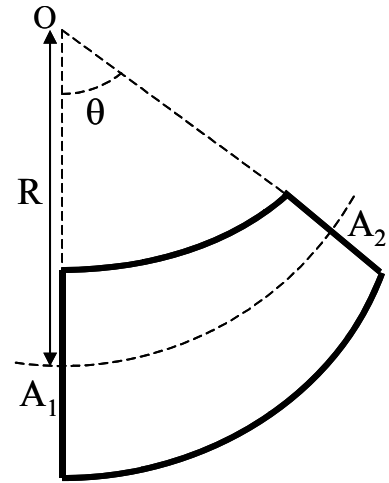


2.27.- Ur-erloju bat egiteko 72 cm-ko altueradun eta 10 cm-ko erradiodun zilindroa erabiltzen da. Bolumen oso bi ordutan husten da hondo lauan egindako zulo txiki batean zehar. Grabitatearen azelerazioa $9,8 \text{ m/s}^2$ -koa da. Kalkulatu zuloaren azalera mm^2 -tan. Lehenengo ordua hondotik zein altueratara finkatu behar da?

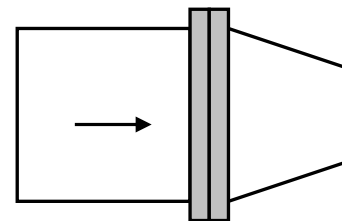
Emaitzak: $1,67 \text{ mm}^2$; $180,55 \text{ mm}$.

2.28.- Sekzio behekorreko ukondo horizontal bat daukagu. Bere ardatzak zirkunferentzi forma du, $R = 0,25 \text{ m}$ -ko erradioduna. Sarrerako eta irteerako sekzioek, ardatzarekiko perpendikularrak, $\theta = 30^\circ$ angelua eratzen dute. Sarrerako sekzioa $A_1 = 0,5 \text{ m}^2$ da eta irteerakoa $A_2 = 0,2 \text{ m}^2$. Ukondotik $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ dentsitateko olioia igarotzen da, emaria $Q = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ izanik. Ukondoaren sarrerako presioa $P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ da. Karga-galerak arbuiaurik, kalkulatu ukondoaren gaineko indar ordezkaria.

Emaitza: $41,12 \text{ kN}$.



2.29.- Metro bateko diametroko tutuerian tobera bat dago. Irteerako abiadura $66,408 \text{ m/s}$ -koa da. Kalkulatu irudiko toberako berneok jasan behar duten indarra, baldin eta ur-emaria $0,6 \text{ m}^3/\text{s}$ -koa bada. Grabitate indarraren eragina arbuiautu.

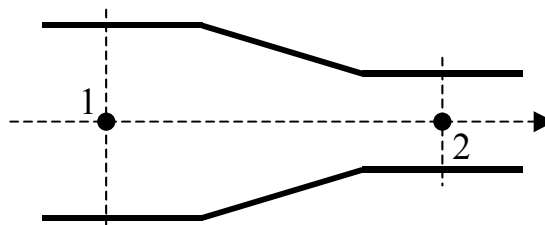


Emaitza: 1692 kN (trakzioan).

2.30.- Ontzi baten hondoan 25 mm-ko diametroa duen zuloa dago. Zulo horretatik ateratzen den emaria $0,76 \text{ m}^3/\text{min}$ da. Ateratzen den txorroaren diametroa 22,5 mm-koa da. Ontzia irekita dago eta bere hondotik gainazal askera 60 m daude. Kalkulatu abiadura-koefizientea, uzkuradura-koefizientea eta deskarga koefizientea.

Emaitzak: $0,929$; $0,810$; $0,752$.

2.31.- Irudiko estugunean zehar Q emaria igarotzen ari da. Kalkulatu uraren abiadura 1 eta 2 puntuetan eta baita 1 eta 2 puntuen arteko presio-diferentzia ere. Bestalde, aurkitu estugunearen gainean likidoak sortzen duen indarra. (Datuak: $Q = 6 \text{ l/s}$, $D_1 = 6 \text{ cm}$, $D_2 = 4 \text{ cm}$, $P_1 = 1 \text{ bar}$)



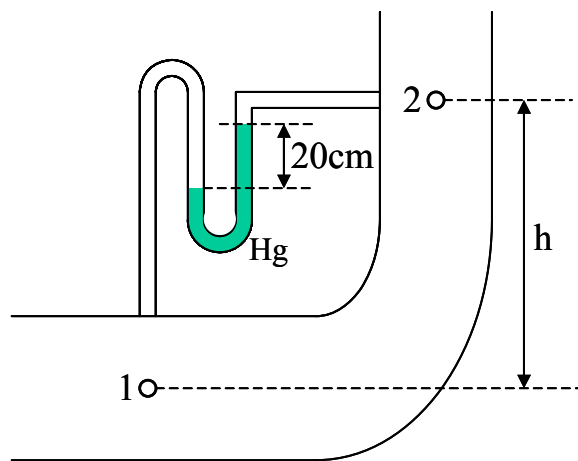
Emaitzak: $2,122 \text{ m/s}$; $4,773 \text{ m/s}$; 9139 Pa ; $152,58 \text{ N}$.

2.32.- Azaldu modu laburrean aerosolaren funtzionamendua.



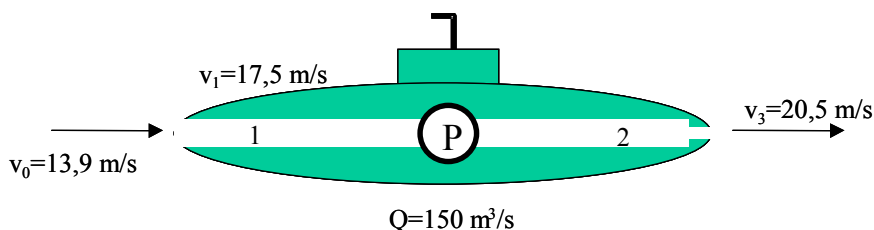
2.33.- Ukondoaren sekzioa 50 cm^2 -etatik 40 cm^2 -etara uzkuratzen da. Ukondotik igarotzen den likidoaren dentsitate erlatiboa $0,835$ bada, kalkulatu ukondotik pasatzen ari den emaria.

Emaitza: 51,61 l/s.



2.34.- “Urri Gorriaren ehiza” pelikulan “Urri Gorria” urpekuntzi errusiarrak txorro-propulsio sistema erabiltzen du higitzeko (ikus irudia). Irudiko abiadura guztiak urpekuntzitik neurtuak dira. Urpekuntzia $30,5 \text{ m}$ -ko sakoneran dagoenean, kalkulatu:

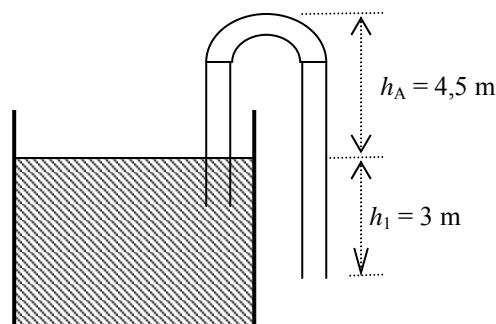
- Presio absolutuaren balioa ponparen sarreran (1).
- Presio absolutuaren balioa propulsio-toberan (2).
- Ponparen potentzi minimoa urpekuntzia bultzatzeko.



Emaitzak: 343,7 kPa; 457,2 kPa; 17,03 MW.

2.35.- Ontzietatik likidoa azkar ateratzeko sifoiak erabiltzen dira askotan. Alboko sifoiaren ura atera nahi dugu. Sifoiaren martxan jartzeko, hodia likidoz beterik egon behar da hasieran. Hodiaren diametroa 150 mm -koa da, eta uniforme da. Gainera, gordailuaren gainazal askearen azalera nahiko handia da eta egurats-presioan dago.

- Irudiko datuak erabiliz, zein da likidoaren igarotze-abiadura?
- Zein da sifoiaren goiko puntuko presio manometrikoa?

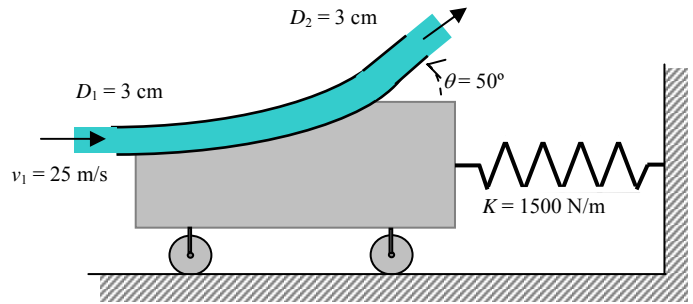


Emaitzak: 7,67 m/s; - 0,441 bar.

2.36.- Itxita dagoen ur-gordailu handi batetik ura 80 cm^2 -ko sekziiodun hodian zehar isurtzen da gordailuko ur-gainazaletik 12 m gorago dagoen puntu batetara. Hoditik segundoko 16 litro ateratzen dira. Zein da gordailuaren ur-gainazaleko presio manometrikoa? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

- $130,1 \text{ kPa}$
- $125,6 \text{ kPa}$
- $122,1 \text{ kPa}$
- $119,6 \text{ kPa}$

2.37.- Masa arbuigarriko jostailu higikor bat malguki baten bidez hormarekin loturik dago. Jostailuak urtxorro ($\rho = 998 \text{ kg/m}^3$) bat 50° desbideratzen du. Fluxua iraunkorra bada, kalkula ezazu:



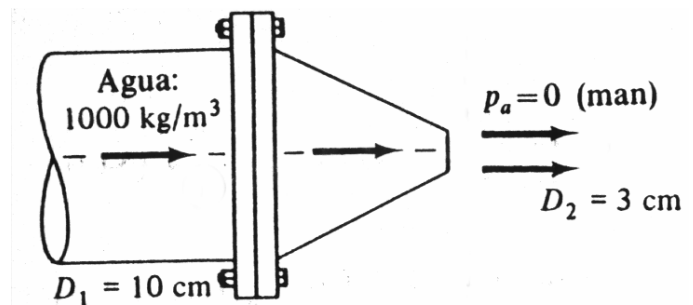
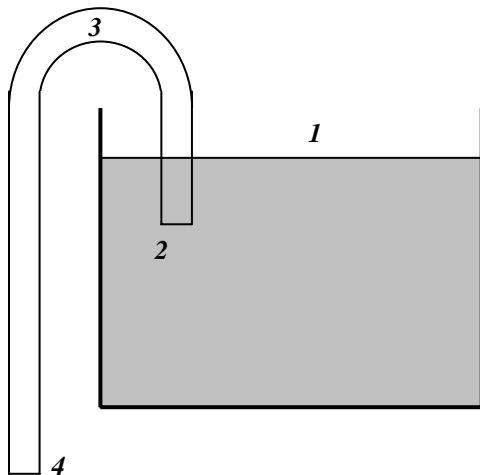
- Txorroaren eraginez gurpilek jasotzen duten indarra.
- Jatorrizko luzeratik malgukiak izan duen konpresioa.
- $\theta = 90^\circ$ bada, malgukiaren konpresio berria.

Emaitzak: 337,75 N; 0,105 m; 0,294 m.

2.38.- Beheko sifoitik ura ateratzen ari da. Zenbat denbora pasatu behar da uraren fluxua gelditu arte?

Datuak: $h_1 = 16 \text{ m}$, $h_2 = 8 \text{ m}$, $h_3 = 24 \text{ m}$, $h_4 = 3 \text{ m}$, $D = 2 \text{ m}$ eta $d = 2 \text{ cm}$.

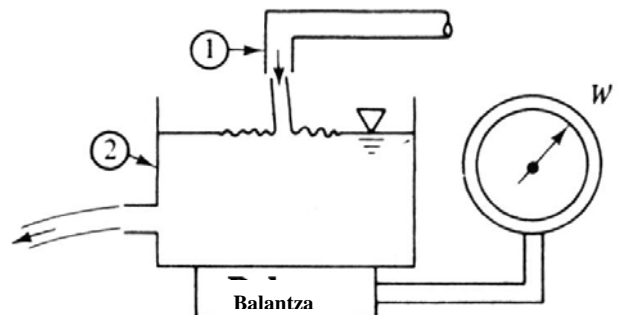
Emaitza: 1 ordu 43 min 6,7 s.



2.39.- 10 cm-ko diametroa duen hodiaren irteera tobera bat da (ikus goiko irudia). Toberatik $1,5 \text{ m}^3/\text{min}$ -ko emaria ateratzen da. Biskositaterik gabeko fluxua bada, kalkula ezazu tobera eusteko erabiltzen diren torlojoetan azaltzen den F_B indarra.

Emaitza: 4068 N.

2.40.- Irudiko ontziaren pisua hutsik dagoenean 290 N-koa da, eta 20°C -tan dagoen $1,1 \text{ m}^3$ ur gordetzen du. Sarrerako eta irteerako tutuak berdinak dira, $D_1 = D_2 = 60 \text{ mm}$, eta 80 l/s -ko emaria dute. Kalkula ezazu balantzaren neurketa (Newtonetan).

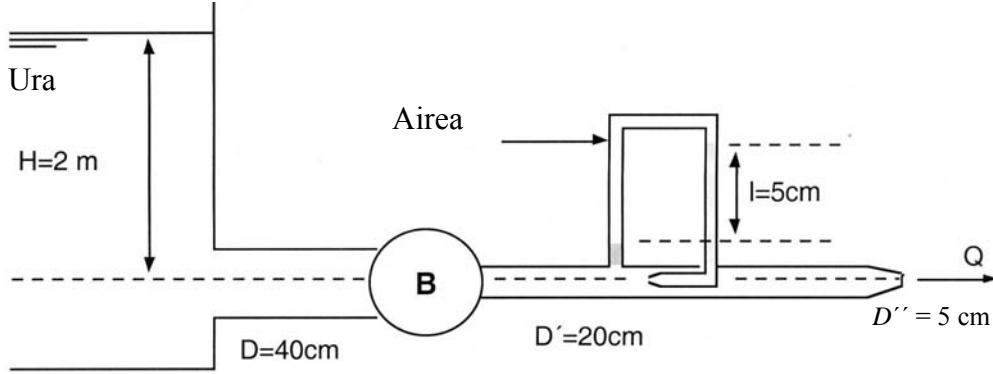


Emaitza: 13333,54 N.

2.41.- Beheko irudiko instalazioan, kalkula ezazu:

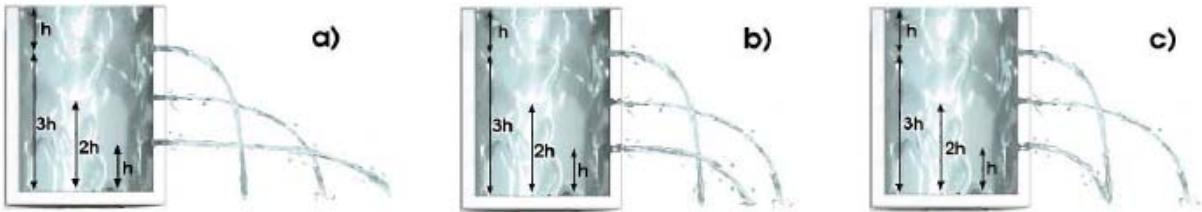
- a) Garraiatzen den ur-emia.
- b) Ponpak urari emandako potentzia.

Suposa ezazu lehen mailako eta bigarren mailako galerak mesprezagarriak direla eta airearen pisu espezifikoak baita, $(\rho g)_{\text{ura}} \gg (\rho g)_{\text{airea}}$. Datua: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

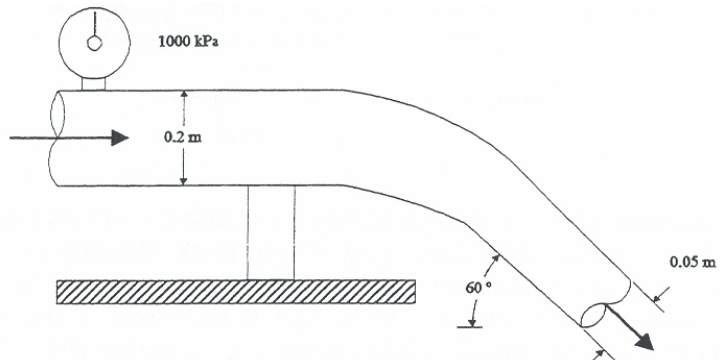


Emaitzak: 31,1 l/s; 3292 W.

2.42.- Beheko hiru gordailuetan uraren maila konstante mantentzen bada, hiru kasuetatik zein da zuzena?

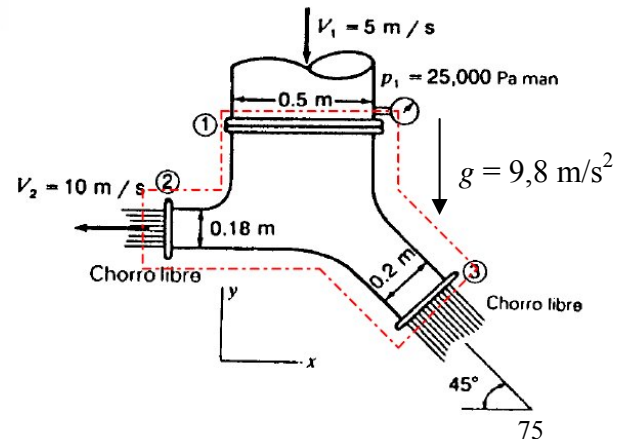


2.43.- Alboko toberan, ura 0,05 m-ko diametroko irteeratik kanporatzen da eguratsera, horizontalarekiko 60° -ko angelua osatuz. Uraren batez besteko irteera-abiadura 40 m/s-koa da. 0,2 m-ko diametrodun sarreran presio erlatiboa 1000 kPa-koa da. Kalkula ezazu tobera eusten duen euskarriaren gaineko indar horizontala.



Emaitza: 30,04 kN.

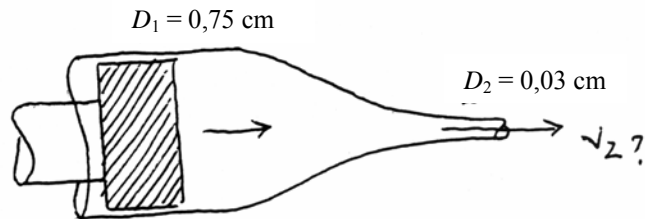
2.44.- Irudiko elementuan ura fluxu iraunkorrean sartzen da. Elementuaren barruko bolumena 1 m^3 da. Irteera bikoitzekoa da, eta bi irteerak eguratsera botatzen dute ura. Kalkulatu 3. irteerako abiadura eta elementuaren gaineko indar bertikala eta horizontala. Barruko uraren pisua kontutan hartu.



Emaitzak: 23,15 m/s; 7712,3 N; 9360,5 N.

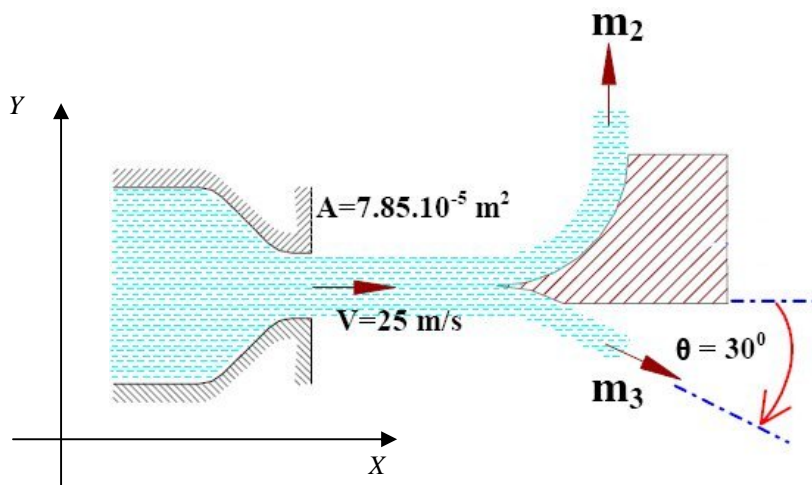
2.45.- Irudiko xiringa hipodermikoa seroz beteta dago. Fluidoaren dentsitate erlatiboa $1'02$ da. Xiringaren enboloa $0'8$ cm/s-ko abiadura konstantez bultzatuz gero:

- Zein da fluidoaren irteera-abiadura cm/s-tan? (Suposa ezazu enboloan ez dagoela inolako ihesik)
- Fluido aldatuz gero, abiadura aldatuko al litzateke?
- Fluido aldatuz gero, enboloan egin beharreko indarra aldatuko al litzateke? Kasu horretan, kalkulatu intsulina injektatzeko eragin beharreko indarra. Intsulinarene dentsitate erlatiboa $1'4$ da.



Emaitza: 500 cm/s.

2.46.- Ur-txorro horizontal batek zali baten kontra jotzen du, bi korrante horizontaletan banatuz (ikus irudia). Hiru ur-txorroen abiadurak berdinak dira. Zaliaren gainean Y norabideko indarra zero izateko, zein izan behar da fluxu masikoen arteko erlazioa (\dot{m}_2/\dot{m}_3)? Zalia geldirik egoteko, zein indar eragin behar da bere gainean?



Emaitzak: $\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_3} = \frac{1}{2}$; 20,736 N.